

## Esquemas numéricos en volúmenes finitos para flujos transitorios no-hidrostáticos: aplicación a la onda de rotura de presas

Cantero-Chinchilla, Francisco N.<sup>a</sup> y Castro-Orgaz, Oscar<sup>b</sup>

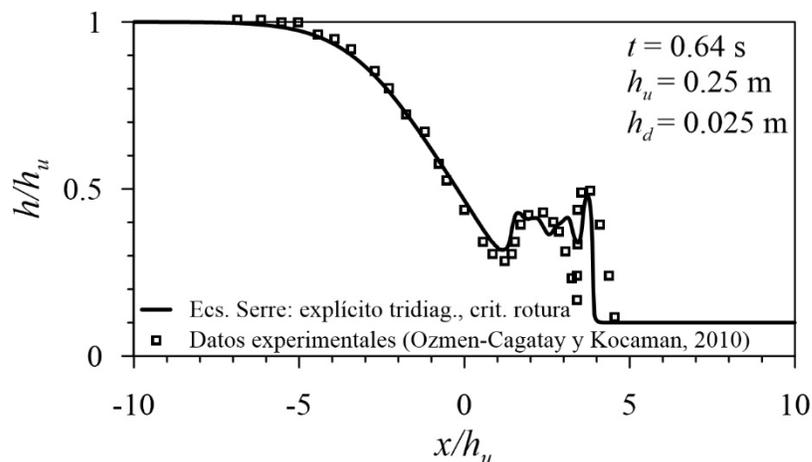
<sup>a</sup>Investigador Postdoctoral, Área de Ingeniería Hidráulica, Departamento de Agronomía, Cta Nacional IV, Km 396, Edificio Da Vinci, Campus de Ranabales, 14071, Universidad de Córdoba y <sup>b</sup>Profesor, Área de Ingeniería Hidráulica, Departamento de Agronomía, Cta Nacional IV, Km 396, Edificio Da Vinci, Campus de Ranabales, 14071, Universidad de Córdoba.

Línea temática A | Dinámica fluvial de embalses, estuarios y humedales

### INTRODUCCIÓN

La modelización de flujos transitorios en lámina libre se realiza en estudios hidrológicos e hidráulicos usando las ecuaciones promediadas verticalmente de masa y cantidad de movimiento, las cuales se simplifican suponiendo que las presiones son hidrostáticas, dando lugar a las conocidas ecuaciones de Saint-Venant (Chaudhry, 2008). Sin embargo, muchos flujos de interés práctico, como las ondas de rotura de presa o la evolución de las formas de un lecho erosionado requieren, a menudo, recurrir a sistemas de orden superior, tales como las ecuaciones tipo Boussinesq (Castro-Orgaz et al., 2015; Castro-Orgaz y Hager 2017). Un ejemplo de este tipo de ecuaciones que ha alcanzado un alto nivel de aceptación son las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi para ondas débilmente dispersivas y totalmente no-lineales.

La ausencia de soluciones analíticas generales para las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi motiva la necesidad de recurrir a soluciones numéricas. En cuanto a esquemas numéricos, en la literatura se pueden encontrar una gran variedad, basados en diferencias finitas (Mohapatra y Chaudhry, 2004), elementos finitos (Antunes Do Carmo et al., 1993) o volúmenes finitos (Soares-Frazão y Zech, 2002). Entre ellos, los esquemas numéricos en volúmenes finitos, con reconstrucción de variables de alta resolución, son claramente la opción más usada en décadas recientes, gracias a los esquemas tipo Godunov, que permiten reproducir ondas de contacto y discontinuidades en el flujo con precisión y robustez (Toro, 2001). Sin embargo, un componente de gran importancia en la calidad de la solución final de estos esquemas numéricos, cuando son aplicados a flujos no-hidrostáticos, es el algoritmo usado para integrar las ecuaciones temporalmente. Dependiendo del nivel de precisión y del orden de discretización, la precisión final de la solución e incluso la estabilidad del modelo se pueden ver comprometidas.



**Figura 1** | Simulación de rotura de presa usando las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi y esquema explícito tridiagonal con criterio de rotura. Nota: la simulación sin criterio de rotura no aparece debido a que el esquema colapsa.

Una comparativa reciente entre esquemas numéricos explícitos para la resolución de sistemas de ecuaciones tipo Boussinesq se puede encontrar en Cantero-Chinchilla et al. (2016a). Sus conclusiones indican que los esquemas numéricos de orden superior, que mantienen el balance entre precisión en la reconstrucción dentro de los volúmenes y la aplicación del paso temporal, proporcionan soluciones adecuadas. Entre ellos, la aplicación de esquemas explícitos para la parte hiperbólica del modelo, conjugados con la solución de matrices tridiagonales para resolver el sistema de ecuaciones elípticas que da el campo de velocidades, es una alternativa frecuentemente utilizada (Soares- Frazão y Zech, 2002; Cantero-Chinchilla et al., 2016a). Sin embargo, al usar estos esquemas, existen situaciones reales las cuales dan lugar a un colapso del esquema numérico si no se introducen funciones de amortiguación externas para atenuar el efecto de los términos dispersivos (Hosoda y Tada, 1994; Cantero-Chinchilla et al., 2016a), tal y como ocurre en flujos de rotura de presa (Figura 1). El empleo de esquemas numéricos implícitos o semi-implícitos permite solucionar este problema sin necesidad de recurrir a funciones semi-empíricas (Cantero-Chinchilla et al., 2016b) aumentando, no obstante, la complejidad de la solución.

En este trabajo se presenta una comparativa entre esquemas numéricos explícitos basados en el uso de soluciones basadas en matrices tridiagonales, y esquemas implícitos, para determinar el campo cinemático no-hidrostático. Las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi (Serre, 1953) son empleadas para ilustrar la simulación del flujo de rotura unidimensional de presa. Los casos de rotura de presa en lecho seco y húmedo son utilizados para analizar el comportamiento de ambos esquemas.

## ECUACIONES DE GOBIERNO

Considérese un lecho horizontal y sin fricción por el cual se desplaza un flujo de rotura de presa (Figura 2). La ecuación de continuidad unidimensional promediada en la vertical para este caso es

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

donde  $h$  es el calado,  $U$  es la velocidad en la dirección del flujo promediada en profundidad ( $=q/h$ , donde  $q$  es el caudal por unidad de anchura),  $x$  es la coordenada longitudinal y  $t$  es el tiempo. Bajo la hipótesis de flujo no hidrostático, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (Serre, 1953; Castro-Orgaz y Hager 2017) es

$$\frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \psi \right) = 0, \quad (2)$$

$$\psi = \frac{h^3}{3} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right], \quad (3)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\psi$  son los términos no hidrostáticos. La presencia del factor (1/3) en la Ec. (3) denota que la distribución de las presiones no hidrostáticas es parabólica en profundidad (Castro-Orgaz y Hager, 2017). Otras hipótesis sobre la distribución de la presión en profundidad modifican el valor de este factor (Castro-Orgaz et al., 2015; Cantero-Chinchilla et al., 2016a). Los términos no hidrostáticos  $\psi$  se relacionan con la sobrepresión en el fondo en exceso de la hidrostática  $p_1$  a través de la siguiente relación (Castro-Orgaz y Hager, 2017)

$$\frac{2hp_1}{3} = \frac{h^3}{3} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right]. \quad (4)$$

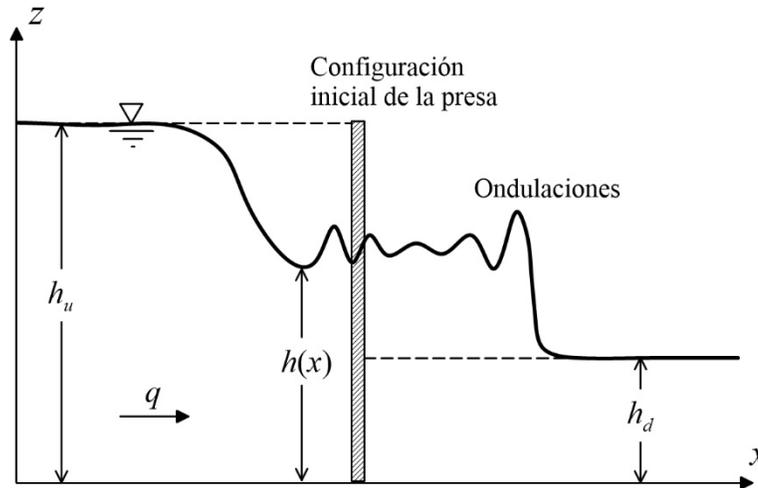


Figura 2 | Esquema de definición de onda no hidrostática debida a rotura de presa.

La relación expresada en la Ec. (4) se obtiene como resultado de integrar la distribución vertical parabólica de la presión propuesta por Serre (1953) en la Ec. (2). La ecuación de balance de la cantidad de movimiento en la dirección vertical para flujos con distribución vertical de presión no hidrostática es (Castro-Orgaz y Hager 2017)

$$\frac{\partial(hW)}{\partial t} + \frac{\partial(hUW)}{\partial x} = \frac{p_1}{\rho}, \quad (5)$$

donde  $W$  es la componente vertical de la velocidad promediada en la profundidad y  $\rho$  es la densidad del fluido. Estableciendo las condiciones cinemáticas en la superficie libre y en el fondo,  $W$  se puede expresar como (Castro-Orgaz et al., 2015; Cantero-Chinchilla et al., 2016b)

$$W = \frac{1}{2}(w_b + w_s) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial(hU)}{\partial x} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (6)$$

donde  $w_b$  y  $w_s$  son las velocidades verticales en el fondo y la superficie libre, respectivamente. Las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi (Serre, 1953) (SGN) [Ec. (1) y (2)] en forma matricial, particularizadas para casos de flujo sin rozamiento sobre un plano horizontal, son (Castro-Orgaz et al., 2015; Cantero-Chinchilla et al., 2016a)

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{SGN}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_{SGN}}{\partial x} = \mathbf{S}_{SGN}, \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{SGN} = \begin{bmatrix} h \\ hU \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{SGN} = \begin{bmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{SGN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

donde  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{S}$  son los vectores de variables conservativas, flujos y términos fuente respectivamente. Este sistema de ecuaciones es completamente equivalente al propuesto Khan y Steffer (1996) (KS), siendo (Castro-Orgaz y Hager, 2017)

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{KS}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_{KS}}{\partial x} = \mathbf{S}_{KS}, \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_{KS} = \begin{bmatrix} h \\ hU \\ hW \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{KS} = \begin{bmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 + \frac{2hp_1}{3\rho} \\ hUW \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{KS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_1}{\rho} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

## ESQUEMAS NUMERICOS

En el tratamiento numérico para la solución de los sistemas dados por las Ec. (8) y (10), la contribución de los términos no hidrostáticos se suele manipular considerándolos como términos fuente adicionales (Erduran et al., 2015; Soares-Frazaõ and Guinot, 2008), dando lugar a la modificación de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{S}$  tal que

$$\mathbf{F}_{SGN} = \begin{bmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{SGN} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathbf{F}_{KS} = \begin{bmatrix} hU \\ hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hUW \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{KS} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2hp_1}{3\rho} \right) \\ \frac{p_1}{\rho} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Usando el método de los volúmenes finitos, la solución integral de las Ec. (8) y (10) en cada celda es (Toro, 2001; 2009)

$$\left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) \Delta t = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}) + \mathbf{S} \Delta t, \tag{13}$$

donde  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{S}$  son valores promediados en las celdas,  $\Delta x$  y  $\Delta t$  son las dimensiones de las celdas en el plano  $x-t$ , y los subíndices  $i \pm 1/2$  indican las posiciones de las interfaces entre celdas.

En este trabajo, la reconstrucción de las variables dentro de cada celda se hace aplicando un esquema de orden 4 tipo MUSCL-TVD (Yamamoto and Daiguji, 1993; Kim et al., 2009; Cantero-Chinchilla et al. 2016a). Los flujos son evaluados mediante la solución aproximada del problema de Riemann usando el esquema HLL (Toro, 2001; Toro, 2009) para las Ecs. (8), y mediante el esquema HLLC (Toro, 2001; Toro, 2009) para las Ec. (10), debido a la presencia de ondas de contacto asociadas con  $W$ . Los detalles de los esquemas numéricos aplicados al caso de estudio pueden consultarse en Cantero-Chinchilla et al. (2016a, b).

Los esquemas numéricos específicos aplicados para el tratamiento de los términos fuente no hidrostáticos de las Ec. (8) y (10) se detallan a continuación.

### Esquema tridiagonal

Expandiendo la derivada espacial de los términos fuente en la Ec. (11) y separando las derivadas temporales dentro del vector de variables conservativas, el sistema queda

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_{SGN}}{\partial x} = \mathbf{Z}, \tag{14}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} h \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hU - \frac{h^3}{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] - \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right) + \\ 2h \frac{\partial(hU)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + h^2 \frac{\partial^2(hU)}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial x} + h^2 \frac{\partial(hU)}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

donde  $y$  es una variable auxiliar. Usando una diferencia finita hacia adelante (esquema de Euler) para el paso temporal en la Ec. (14), esta queda en la forma

$$\mathbf{W}_i^{k+1} = \mathbf{W}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^k - \mathbf{F}_{i-1/2}^k) + \Delta t [\mathbf{Z}(\mathbf{U}_i^k)], \quad (17)$$

donde  $k$  es el estado temporal actual y  $k+1$  el siguiente. Una vez calculado  $\mathbf{W}$  en  $k+1$ , usando diferencias finitas de segundo orden para discretizar las derivadas parciales,  $y_i^{k+1}$  se puede expresar como una ecuación tridiagonal tal que

$$y_i^{k+1} = A_i U_{i-1}^{k+1} + B_i U_i^{k+1} + C_i U_{i+1}^{k+1}, \quad (18)$$

$$A_i = \left[ -\frac{(h_i^{k+1})^3}{3\Delta x^2} + \frac{(h_i^{k+1})^2}{4\Delta x^2} (h_{i+1}^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}) \right], \quad (19)$$

$$B_i = \left[ h_i^{k+1} + \frac{2(h_i^{k+1})^3}{3\Delta x^2} \right], \quad (20)$$

$$C_i = \left[ -\frac{(h_i^{k+1})^3}{3\Delta x^2} - \frac{(h_i^{k+1})^2}{4\Delta x^2} (h_{i+1}^{k+1} - h_{i-1}^{k+1}) \right]. \quad (21)$$

Finalmente, para calcular el campo de velocidades se aplica el algoritmo de Thomas a la Ec. (18) (Wei et al., 1995).

## Esquema semi-implícito

Aplicando el esquema de Euler a las Ec. (10), y evaluando los términos fuente con las variables conservativas en el instante de tiempo siguiente  $k+1$ , queda el siguiente esquema implícito

$$\mathbf{U}_{KS,i}^{k+1} = \mathbf{U}_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{KS,i+1/2}^k - \mathbf{F}_{KS,i-1/2}^k) + \Delta t [\mathbf{S}_{KS}(\mathbf{U}_{KS,i}^{k+1})]. \quad (22)$$

Debido a que los términos fuente en la ecuación de continuidad son nulos, la solución de  $h$  para  $k+1$  es inmediata y se obtiene explícitamente de la Ec. (22). Haciendo uso de la Ec. (6) para sustituir  $W$  por una función de la velocidad media horizontal  $U$ , el sistema de ecuaciones restante tiene como incógnitas a determinar  $U$  y  $p_1$  en  $k+1$ , siendo

$$(hU)_i^{k+1} = (hU)_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( hU^2 + g \frac{h^2}{2} \right)_{i+1/2}^k - \left( hU^2 + g \frac{h^2}{2} \right)_{i-1/2}^k \right] - \Delta t \frac{2}{3\rho} \frac{\partial(hp_1)}{\partial x}, \quad (23)$$

$$(hW)_i^{k+1} = (hW)_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (hUW)_{i+1/2}^k - (hUW)_{i-1/2}^k \right] + \Delta t \frac{p_1}{\rho}, \quad (24)$$

donde

$$C_1 = (hU)_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( hU^2 + g \frac{h^2}{2} \right)_{i+1/2}^k - \left( hU^2 + g \frac{h^2}{2} \right)_{i-1/2}^k \right], \quad (25)$$

$$C_2 = (hW)_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (hUW)_{i+1/2}^k - (hUW)_{i-1/2}^k \right]. \quad (26)$$

Aplicando el algoritmo de Newton-Raphson a las Ec. (23) y (24), el sistema de ecuaciones se resuelve de manera iterativa actualizando los valores de la solución  $U$  y  $p_1$  en  $k+1$  a través de la solución de una matriz Jacobiana, donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes durante el proceso. En este trabajo se han adoptado 5 iteraciones de manera estándar, las cuales dan lugar a errores globales de las Ec. (23) y (24) por debajo de  $10^{-6}$ .

## CRITERIO DE ROTURA DE ONDA

La solución de las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi mediante esquemas tridiagonales a menudo requiere una atenuación de los términos dispersivos físicos. Según Cantero-Chinchilla et al. (2016a), en flujos de rotura de presa sobre lecho horizontal y sin fricción, el criterio empírico de rotura de onda propuesto por Hosoda y Tada (1994) funciona adecuadamente, quedando el término fuente

$$\mathbf{S}_{SGN} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\gamma = \begin{cases} 1 & , \text{ si } |h_x| < h_{cr} \\ \exp[-\phi(|h_x| - h_{cr})] & , \text{ si } |h_x| \geq h_{cr} \end{cases}, \quad (28)$$

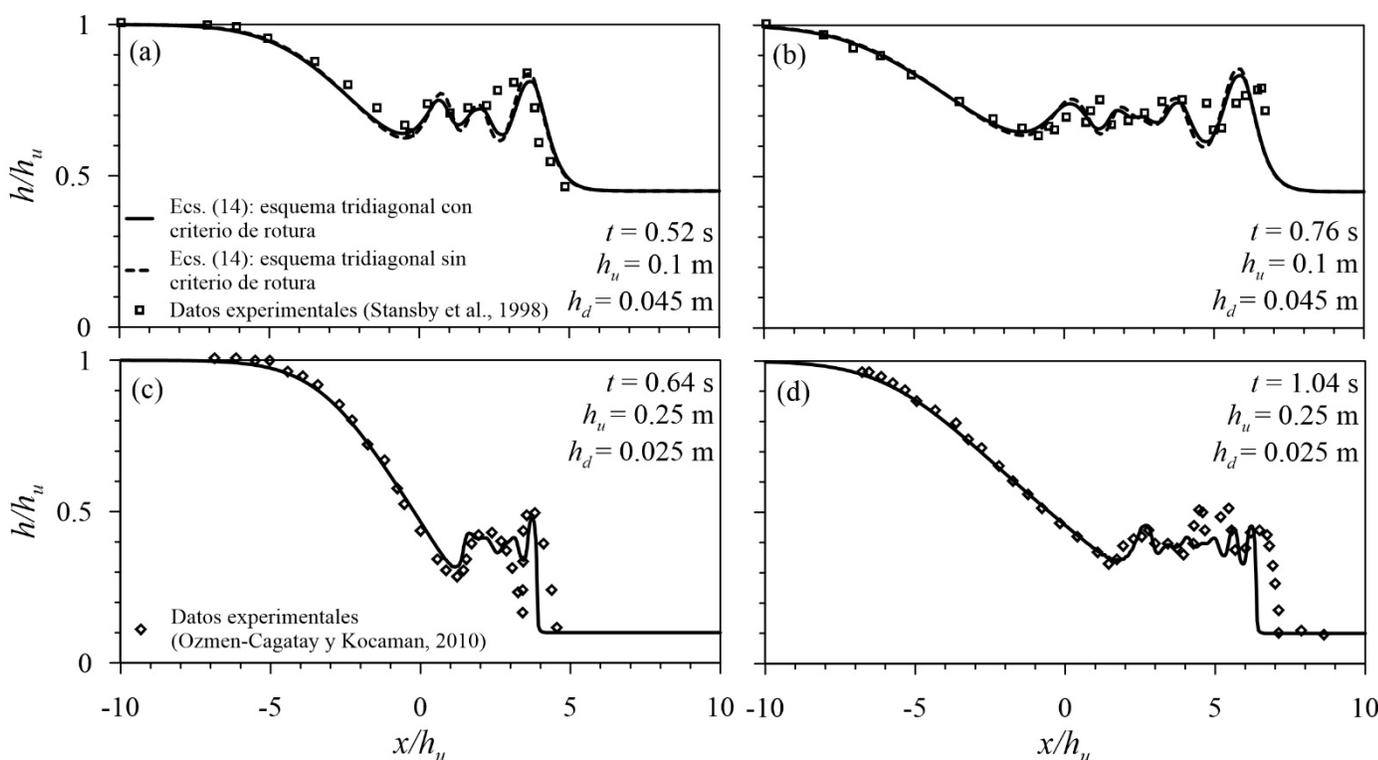
donde  $\gamma$  es el factor de atenuación de Hosoda y Tada (1994),  $\phi$  es un coeficiente empírico a calibrar ( $=2$ ),  $h_x$  es la pendiente de la superficie libre del flujo ( $= \partial h / \partial x$ ) y  $h_{cr}$  es el umbral de la pendiente de la superficie libre que hace que se active el criterio de rotura de onda ( $=0.225$ ).

## RESULTADOS

En esta sección se evalúan los esquemas numéricos propuestos en secciones previas para la solución de las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi. Para ello, se analizan varios casos de rotura de presa, usando datos experimentales procedentes de Stansby et al. (1998) y de Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010), en los que el lecho aguas abajo pasa por varios estados, incluyendo el lecho seco. Además, la solución de las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi para lecho seco aguas abajo, y sin fricción, es comparada con la solución analítica propuesta por Ritter (Toro, 2001; Cantero-Chinchilla et al., 2016a).

## Esquema tridiagonal aplicado a lecho húmedo

La Figura 3 muestra las soluciones del sistema dado por las Ec. (14) usando esquema explícito tridiagonal comparadas con los datos experimentales de Stansby et al. (1998) (Fig. 3a y 3b) y de Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010) (Fig. 3c y 3d). Los datos experimentales de Stansby et al. (1998) en la Fig. 3 se corresponden con una rotura de presa de  $h_u=0.1\text{m}$  y  $h_d=0.045\text{m}$  para  $t=0.52\text{s}$  (Fig. 3a) y  $t=0.76\text{s}$  (Fig. 3b), mientras que los de Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010) hacen referencia a una rotura de presa de  $h_u=0.25\text{m}$  y  $h_d=0.025\text{m}$  para  $t=0.64\text{s}$  (Fig. 3c) y  $t=1.04\text{s}$  (Fig. 3d). Las simulaciones se han llevado a cabo usando  $\Delta x=0.01\text{m}$  y un valor del número de Courant-Friedrichs-Lewy  $\text{CFL}=0.01$  para  $t<0.02\text{s}$  y  $\text{CFL}=0.2$  para  $t>0.02\text{s}$ . Mediante este criterio se evitan errores numéricos en la solución procedentes de los elevados gradientes que se dan durante los primeros instantes, debido a que la solución de flujo es discontinua. Las soluciones que consideran el criterio de rotura de Hosoda y Tada (1994) consiguen controlar las inestabilidades numéricas y, por tanto, proporcionar unos resultados en concordancia con los datos experimentales. Sin embargo, si el criterio de rotura de onda no es aplicado, los resultados de las simulaciones sobreestiman las ondulaciones de la superficie libre (Figs. 3a y 3b) e incluso provocan el colapso del programa (nótese que esta solución está ausente en las Figs. 3c y 3d debido al fallo). Estos resultados ponen en evidencia que la aplicación del esquema explícito tridiagonal a la solución de las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi requiere el uso de funciones externas de amortiguamiento para mitigar los efectos de dispersión de frecuencia. Siendo así, tanto la onda de rarefacción como el tren de ondas de avance son correctamente simulados.

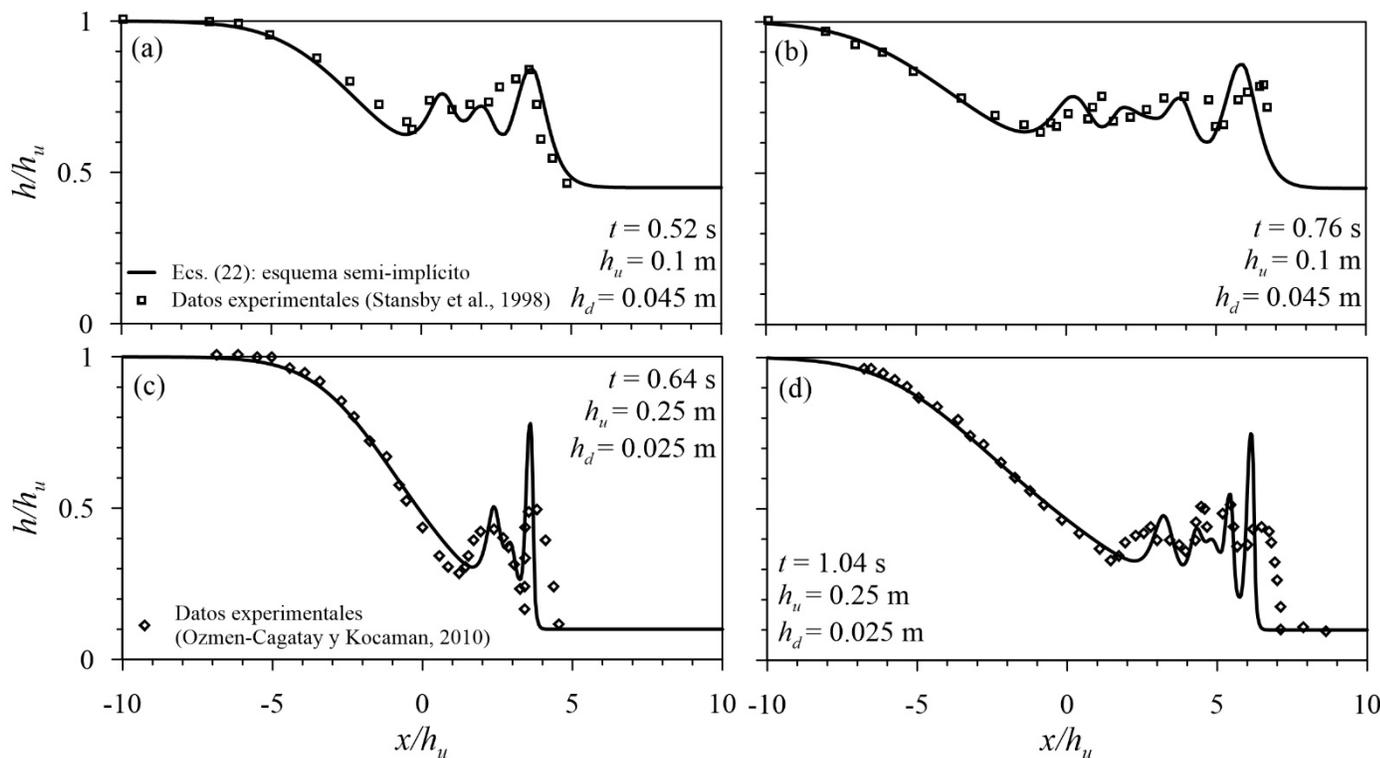


**Figura 3** | Evaluación del esquema numérico explícito tridiagonal y el criterio de rotura de onda de Hosoda y Tada (1994) para la solución de las Ec. (14) en comparación con datos experimentales de rotura de presa de Stansby et al. (1998) y Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010) para diferentes condiciones: (a)  $h_u=0.1\text{m}$ ,  $h_d=0.045\text{m}$ ,  $t=0.52\text{s}$ ; (b)  $h_u=0.1\text{m}$ ,  $h_d=0.045\text{m}$ ,  $t=0.76\text{s}$ ; (c)  $h_u=0.25\text{m}$ ,  $h_d=0.025\text{m}$ ,  $t=0.64\text{s}$ ; (d)  $h_u=0.25\text{m}$ ,  $h_d=0.025\text{m}$ ;  $t=1.04\text{s}$ .

## Esquema semi-implícito aplicado a lecho húmedo

La Figura 4 presenta la solución de las Ec. (22) mediante la aplicación del esquema semi-implícito en comparación con los datos experimentales utilizados previamente en la Figura 3. En este caso, la solución no requiere de funciones externas de amortiguación de los términos no hidrostáticos para dar lugar a simulaciones estables en todo el rango de calados agua abajo. Nótese que a medida que se disminuye el calado aguas abajo, las ondas provocadas por el flujo de rotura de presa presentan

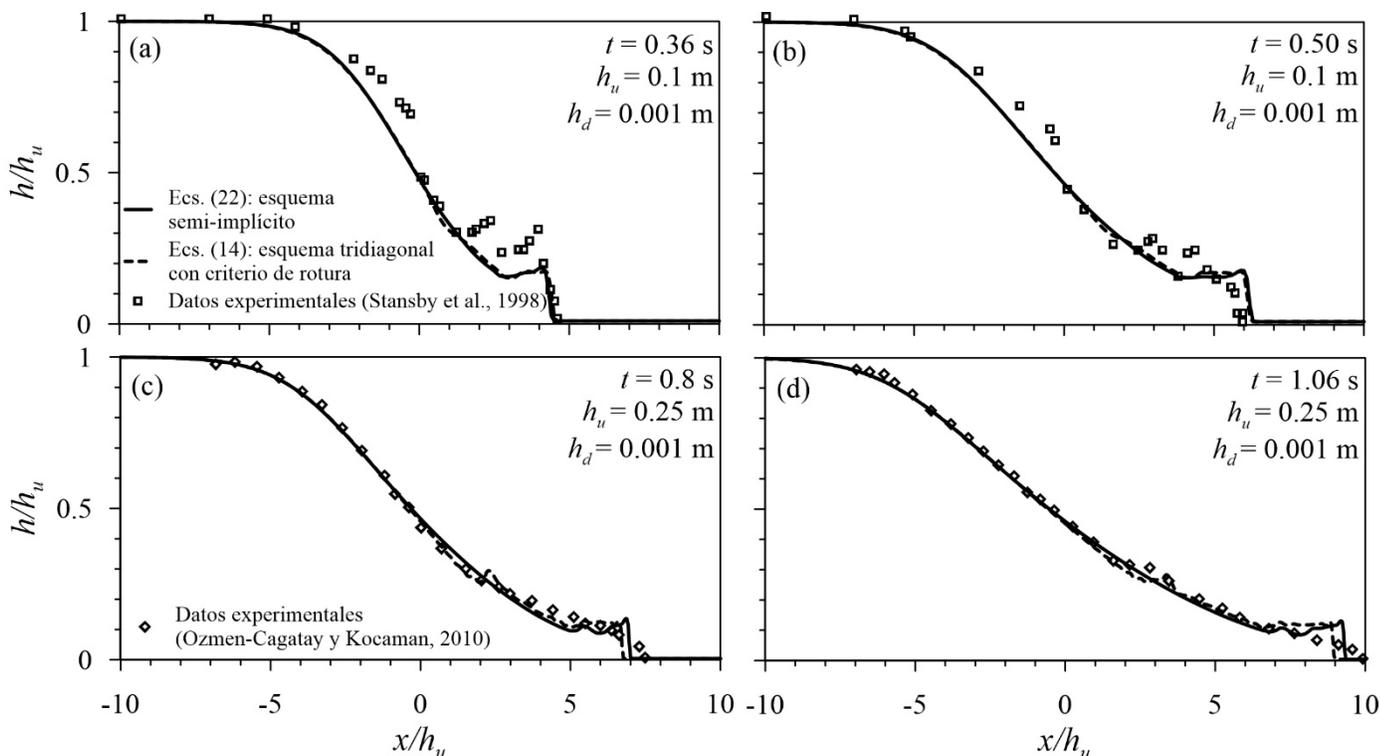
mayor no linealidad y, por tanto, los términos no hidrostáticos producen mayores amplitudes de onda. De esta manera, y en ausencia de funciones de amortiguación, la amplitud del frente de onda de avance tras la rotura en las Figs. 4c y 4d sobrepasa los datos experimentales de Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010). Sin embargo, para el caso de la rotura de presa de Stansby et al. (1998), donde el calado aguas arriba de la presa (situada en  $x=0\text{m}$  en ambos casos) es relativamente menor que en el caso de Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010), la solución del esquema semi-implícito de las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi sigue la tendencia de los datos experimentales y, además, está en concordancia con la solución sin criterio de rotura que aporta el esquema explícito tridiagonal (Figs. 3a y 3b). Esto último es un indicador de que ambos esquemas numéricos dan resultados similares para rotura de presa en régimen subcrítico ( $h_d/h_u=0.45$ ) (compárese Figs. 3a y 3b con 4a y 4b). No obstante, para rotura de presa transcítica ( $h_d/h_u=0.1$ ) los esquemas presentan un comportamiento diferencial (compárese Figs. 3c y 3d con Figs. 4c y 4d).



**Figura 4** | Evaluación del esquema numérico semi-implícito para la solución de las Ecs. (22) en comparación con datos experimentales de rotura de presa de Stansby et al. (1998) y Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010) para diferentes condiciones: (a)  $h_u=0.1\text{m}$ ,  $h_d=0.045\text{m}$ ,  $t=0.52\text{s}$ ; (b)  $h_u=0.1\text{m}$ ,  $h_d=0.045\text{m}$ ,  $t=0.76\text{s}$ ; (c)  $h_u=0.25\text{m}$ ,  $h_d=0.025\text{m}$ ,  $t=0.64\text{s}$ ; (d)  $h_u=0.25\text{m}$ ,  $h_d=0.025\text{m}$ ;  $t=1.04\text{s}$ .

### Análisis de rotura de presa sobre lecho seco

Los resultados de ambos esquemas numéricos son comparados en la Figura 5 con datos de rotura de presa sobre lecho seco procedentes de Stansby et al. (1998) (Figs. 5a y 5b) y de Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010) (Figs. 5c y 5d). Las simulaciones de lecho seco se llevaron a cabo suponiendo un calado aguas abajo  $h_d=0.001\text{m}$  y manteniendo las restantes características de las simulaciones numéricas de apartados anteriores. La fina capa de agua de 1 mm provoca fundamentalmente 2 efectos en las simulaciones: minimiza la amplitud las ondulaciones en la superficie libre y da lugar a una onda de avance de amplitud constante. Nótese que el esquema semi-implícito da resultados similares a los del esquema tridiagonal (con criterio de rotura), sin necesidad de utilizar funciones de amortiguamiento externas. Sin embargo, el esquema explícito tridiagonal colapsa en ausencia del criterio de rotura de Hosoda y Tada (1994), y no permite obtener ninguna solución.

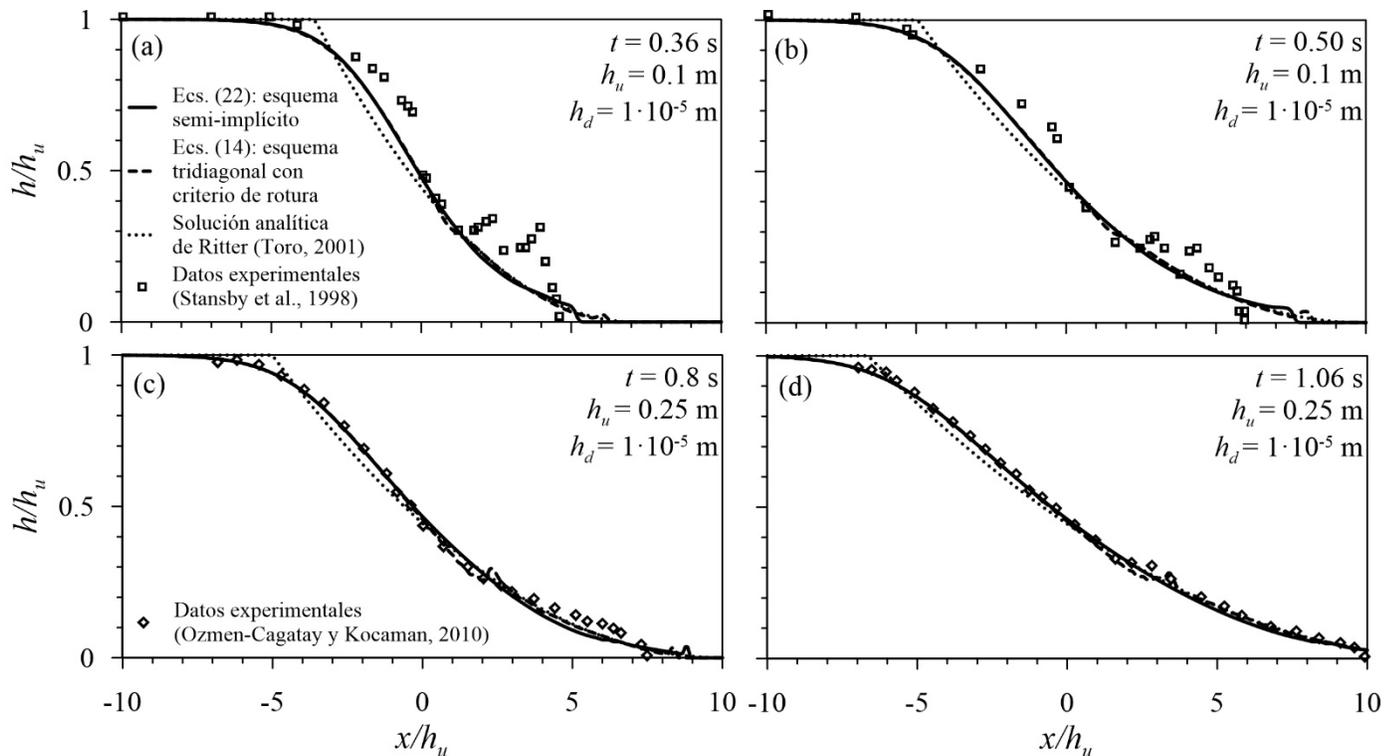


**Figura 5** | Evaluación ambos esquemas numéricos en comparación con datos experimentales de rotura de presa sobre fondo seco de Stansby et al. (1998) y Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010) para diferentes condiciones: (a)  $h_u=0.1\text{m}$ ,  $h_d=0.001\text{m}$ ,  $t=0.36\text{s}$ ; (b)  $h_u=0.1\text{m}$ ,  $h_d=0.001\text{m}$ ,  $t=0.50\text{s}$ ; (c)  $h_u=0.25\text{m}$ ,  $h_d=0.001\text{m}$ ,  $t=0.8\text{s}$ ; (d)  $h_u=0.25\text{m}$ ,  $h_d=0.001\text{m}$ ;  $t=1.06\text{s}$ .

En el caso de un flujo de rotura de presa sobre lecho seco aguas abajo, horizontal y sin fricción, la solución analítica de Ritter (Toro, 2001), la cual implica  $h_d=0$ , es

$$h = \frac{h_u}{9} \left[ 2 - \frac{x}{t(g h_u)^{1/2}} \right]^2 \quad (29)$$

Se han repetido las simulaciones usando un valor más pequeño de  $h_d$ ,  $h_d=10^{-5}\text{m}$ , presentándose los resultados en la Fig. 5 para su comparación con la solución analítica de Ritter (Toro, 2001) (Fig. 6). La solución numérica del esquema semi-implícito todavía resulta sensible al calado aguas abajo, dando lugar a una pequeña onda de choque de avance (Figs. 6a y 6c) que, sin embargo, se va disipando a medida que la solución avanza en el tiempo, dando una concordancia adecuada con la solución de Ritter (Figs. 6b y 6d). Por otro lado, la solución que proporciona el esquema explícito tridiagonal es menos sensible al calado aguas abajo de la presa, dando lugar a ondas de choque de avance muy pequeñas o prácticamente a perfiles cuasi-parabólicos. Las dos soluciones numéricas están en concordancia con la solución de Ritter. Las desviaciones entre la solución hidrostática de Ritter y las numéricas de las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi esta ocasionada por las presiones no hidrostáticas consideradas en las últimas. Nótese que no es posible obtener soluciones para este test con el esquema explícito tridiagonal en ausencia de la función de amortiguamiento.



**Figura 6** | Evaluación ambos esquemas numéricos en comparación con la solución analítica de Ritter (Toro, 2001) y los datos experimentales de rotura de presa sobre fondo seco de Stansby et al. (1998) y Ozmen-Cagatay y Kocaman (2010) para diferentes configuraciones: (a)  $h_u=0.1\text{ m}$ ,  $h_d=0.001\text{ m}$ ,  $t=0.36\text{ s}$ ; (b)  $h_u=0.1\text{ m}$ ,  $h_d=1\cdot 10^{-5}\text{ m}$ ,  $t=0.50\text{ s}$ ; (c)  $h_u=0.25\text{ m}$ ,  $h_d=1\cdot 10^{-5}\text{ m}$ ,  $t=0.8\text{ s}$ ; (d)  $h_u=0.25\text{ m}$ ,  $h_d=1\cdot 10^{-5}\text{ m}$ ;  $t=1.06\text{ s}$ .

## CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se extraen de este trabajo son:

- i. La solución de las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi mediante esquemas explícitos basados en la resolución del campo de velocidades empleando sistemas tridiagonales requiere un criterio de rotura de onda mediante el uso de funciones de amortiguamiento para los términos no hidrostáticos. Esto es necesario para producir resultados estables en todo el rango de calados aguas abajo. En caso contrario el esquema colapsa para flujo transcrito.
- ii. El uso del esquema semi-implícitos da lugar a soluciones estables en todo el rango de calados aguas abajo de la presa para las ecuaciones de Serre-Green-Naghdi sin necesidad de introducir funciones de amortiguación. Esta estabilidad de la solución puede ser atribuida al carácter implícito de parte de la solución.
- iii. Para simulaciones de rotura de presa con lecho seco aguas abajo, considerando un calado numérico pequeño, ambos esquemas proporcionan soluciones precisas y muy similares, donde el esquema semi-implícito proporciona la solución más estable e uniforme. Cuando el calado aguas abajo se reduce drásticamente, ambos esquemas numéricos están muy próximos a la solución analítica (hidrostática) de Ritter.

## REFERENCIAS

Cantero-Chinchilla, F.N., Castro-Orgaz, O., Dey, S., Ayuso, J.L. 2016a. Nonhydrostatic dam break flows. I: Physical equations and numerical schemes. *Journal of Hydraulic Engineering*, 142(12), 04016068.

- Cantero-Chinchilla, F.N., Castro-Orgaz, O., Dey, S., Ayuso-Muñoz, J.L. 2016b. Nonhydrostatic dam break flows. II: One-dimensional depth-averaged modeling for movable bed flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 142(12), 04016069.
- Castro-Orgaz, O., Hager, W. H. 2017. *Non-Hydrostatic Free Surface Flows*, Springer, Berlin.
- Castro-Orgaz, O., Hutter, K., Giraldez, J.V., Hager, W.H. 2015. Nonhydrostatic granular flow over 3-D terrain: New Boussinesq-type gravity waves?. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 120(1), 1-28.
- Chaudhry, M.H. 2008. *Open-channel flow*, Springer, Berlin.
- Antunes Do Carmo, J. S., Seabra Santos, F. J., Barthélemy, E. 1993. Surface waves propagation in shallow water: a finite element model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 16(6), 447-459.
- Hosoda, T., Tada, A. 1994. Free surface profile analysis on open channel flow by means of 1-D basic equations with effect of vertical acceleration. *Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE*, 38, 457-462 (in Japanese).
- Kim, D. H., Lynett, P. J., Socolofsky, S. A. 2009. A depth-integrated model for weakly dispersive, turbulent, and rotational fluid flows. *Ocean Modelling*, 27(3), 198-214.
- Mohapatra, P.K., Chaudhry, M.H. 2004. Numerical solution of Boussinesq equations to simulate dam-break flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(2), 156-159.
- Ozmen-Cagatay, H., Kocaman, S. 2010. Dam-break flows during initial stage using SWE and RANS approaches. *Journal of Hydraulic Research*, 48(5), 603-611.
- Serre, F. 1953. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux (Contribution to the study of steady and unsteady channel flows). *La Houille Blanche*, 8(3), 374-388 (in French).
- Soares-Frazão, S., Guinot, V. 2008. A second-order semi-implicit hybrid scheme for one-dimensional Boussinesq-type waves in rectangular channels. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(3), 237-261.
- Soares-Fraza, S., Zech, Y. 2002. Undular bores and secondary waves-Experiments and hybrid finite-volume modelling. *Journal of Hydraulic Research*, 40(1), 33-43.
- Stansby, P. K., Chegini, A., Barnes, T. C. D. 1998. The initial stages of dam-break flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 374, 407-424.
- Toro, E. F. (2001). *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*, John Wiley.
- Toro, E. F. (2009). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*, Springer Science & Business Media.
- Wei, G., Kirby, J. T., Grilli, S. T., Subramanya, R. 1995. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 294(13), 71-92.
- Yamamoto, S., Daiguji, H. 1993. Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computers & Fluids*, 22(2-3), 259-270.