

Calibración general del método SPH para estudios en cauces. Condición de contorno de fricción y ley de semejanza

David López Gómez^a, Tamara Ramos del Rosario^b, Juan José Rebollo Cillán^c, Rubén Díaz Martínez^d y Francisco R. Andrés Martín^e

^a Centro de Estudios Hidrográficos. CEDEX. Paseo Bajo de Virgen del Puerto nº3. 28005. Madrid. david.lopez@cedex.es. Centro de Estudios Hidrográficos. CEDEX. Paseo Bajo de Virgen del Puerto nº3. 28005. Madrid. tamara.ramos@cedex.es. ^c Centro de Estudios Hidrográficos. CEDEX. Paseo Bajo de Virgen del Puerto nº3. 28005. Madrid. juan.j.rebollo@cedex.es. ^d Centro de Estudios Hidrográficos. CEDEX. Paseo Bajo de Virgen del Puerto nº3. 28005. Madrid. ruben.diaz@cedex.es. ^e Centro de Estudios Hidrográficos. CEDEX. Paseo Bajo de Virgen del Puerto nº3. 28005. Madrid. francisco.r.andres@cedex.es

Línea temática A | Dinámica fluvial de embalses, estuarios y humedales

RESUMEN

El método de la hidrodinámica suavizada de partículas (SPH) se ha utilizado con éxito en la simulación hidrodinámica de la interacción del flujo con estructuras. En el caso del flujo de canales abiertos la fricción del contorno juega un papel fundamental y determina la posición de la superficie libre. Las condiciones de contorno utilizadas en SPH, que no introducen fricción en los contornos, no pueden reproducir correctamente los flujos en cauces en lámina libre.

En este trabajo se presenta una formulación original de la condición de contorno de fricción, que introduce una tensión de contorno en función del coeficiente de rugosidad de Manning. Además, se presentan los trabajos de calibración basados en un caso de prueba, de un canal rectangular y planta recta. Este estudio se ha realizado con el método W-SPH, débilmente compresible, en el que se ha implementado una regularización del campo de presión en función de la posición de la superficie libre. El modelo de turbulencia empleado es el de viscosidad artificial de Monaghan. Como resultado de este trabajo se han obtenido leyes generales del perfil de velocidad así como de la viscosidad cinemática turbulenta, que se obtienen en SPH con este modelo de viscosidad, lo que ha permitido obtener un criterio de semejanza hidráulica que garantiza la representatividad de una simulación hidrodinámica SPH, en cauces en lámina libre.

Palabras clave | rugosidad de lecho; condición de contorno; CFD (fluido-dinámica computacional); resistencia al flujo (Coeficiente de fricción); flujo en cauces en lámina libre; hidrodinámica suavizada de partículas (SPH).

INTRODUCCIÓN

Las técnicas computacionales de dinámica de fluidos (CFD) basadas en modelos sin malla, incluyendo el método de hidrodinámica suavizada de partículas (SPH), proporcionan una descripción Lagrangiana del movimiento del agua sin las restricciones de modelos Eulerianos (Liu y Liu 2003). CEDEX ha desarrollado un software CFD llamado SPHERIMENTAL (López, 2011a) en FORTRAN CUDA para la computación de la unidad de procesamiento gráfico (GPU). Es una evolución del MDST (Grassa, 2004). SPHERIMENTAL se basa en el método SPH, y se está utilizando como una herramienta complementaria a la experimentación física en estudios hidráulicos. Estos trabajos han proporcionado datos suficientes para la calibración del método SPH. Se han obtenido buenos resultados en simulaciones de interacción flujo-estructura (Gatti 2007), donde la fricción juega un papel secundario (López et al., 2009).

El desarrollo de técnicas computacionales tales como la interfaz de paso de mensajes (MPI) (Grassa 2007) y Compute Unified Device Architecture (CUDA) (Hérault et al., 2010, Crespo et al., 2011) ha permitido que el método se aplique a dominios espaciales mayores, y con tiempos de cálculo cada vez más reducidos. Sin embargo, la aplicación del método SPH al estudio hidráulico en cauces en lámina libre, presenta importantes discordancias debido a los efectos de rugosidad (López et al., 2011b).

El método más utilizado por los ingenieros hidráulicos para caracterizar la condición de contorno de fricción es la fórmula de Manning (King 1918). Esta Ecuación utiliza un coeficiente de rugosidad que depende de varios factores tales como el tipo de material límite, el envejecimiento y la vegetación; Los valores de n se encuentran disponibles en la literatura científica y técnica.

Se ha implementado un nuevo método para SPH que permite introducir los esfuerzos de fricción en el contorno, en función de un coeficiente de fricción que depende del coeficiente n , con el fin de aprovechar el conocimiento experimental anterior. Sin embargo, la fórmula de Manning no es dimensionalmente correcta. No obstante, existe una relación entre la rugosidad de Nikusadse (1933) y el coeficiente de n Manning que permite dar generalidad al método.

Hay varias técnicas diferentes para reproducir la geometría del contorno en el método SPH y para confinar el fluido dentro del dominio de estudio, tales como las fuerzas de Lennard-Jones (Lennard-Jones 1924), partículas fantasmas (Randles y Libersky 1996) y partículas dinámicas (Crespo 2007). Sin embargo, hasta la fecha, la resistencia al flujo ejercida por estos métodos no ha sido cuantificada.

Este artículo analiza los efectos de fricción usando el método de Lennard-Jones y estudia su influencia en los parámetros característicos. Se ha seleccionado como caso de prueba un canal rectangular abierto, en un caso de prueba de flujo permanente y uniforme, plenamente documentado en la literatura técnica, que ha permitido comprobar que el método Lennard Jones genera un efecto de rugosidad en el contorno muy bajo.

MODELIAZIÓN NUMÉRICA

El método numérico

El método SPH es un método basado en partículas caracterizado en primer lugar por una discretización lagrangiana del medio continuo utilizando un conjunto de partículas y, en segundo lugar, por la interacción de las partículas del estudio entre ellas. Usando un esquema de promediación, los valores de campo para variables seleccionadas (presión, densidad, velocidad y posición) se obtienen a partir de valores discretos en las partículas de fluido (Figura 1).

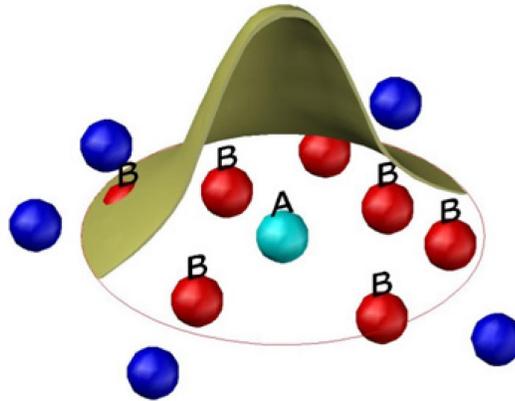


Figura 1 | Kernel de interpolación SPH.

SPHERIMENTHAL resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D y 3D para un flujo monofásico y débilmente compresible. Esto permite que las ecuaciones de Navier-Stokes a continuación (Ecuaciones 1 y 2), se integren usando un esquema de tiempo explícito, donde se resuelve adicionalmente una ecuación de estado, Ecuación. (3), (Monaghan 2005):

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b (v_a - v_b) \cdot \nabla W_{ab} \quad (1)$$

$$\frac{dv_a}{dt} = -\sum_b m_b \left(\frac{p_b}{\rho_b^2} + \frac{p_a}{\rho_a^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + g \quad (2)$$

$$p_i = \frac{\rho_0 c_s^2}{\gamma} \left(\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (3)$$

En la Ecuación (3) c_s es la velocidad del sonido en el medio, ρ_0 es una densidad de referencia, y se toma generalmente $\gamma = 7$, lo que conduce a una dependencia rígida entre la presión y la densidad. En cada caso simulado, se utilizó una velocidad de sonido c_s , siempre diez veces mayor que la velocidad máxima de flujo, para asegurar una compresibilidad del fluido inferior al 1%. Esto permite adoptar pasos de tiempo más grandes, satisfaciendo la condición de Courant (Monaghan 1992). En la Ecuación (2) de la dinámica, aparece el término Π_{ab} , que representa las fuerzas viscosas. En SPHERIMENTAL, se aplican diversas formulaciones de turbulencia; Sin embargo, los modelos complejos de turbulencia requieren un costo computacional excesivo. López et al. (2010) demostraron que la viscosidad artificial de Monaghan definida por las siguientes ecuaciones reproduce correctamente la disipación viscosa en flujos con un número de Froude menor que 5.

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}}, & v_{ab} \cdot r_{ab} < 0 \\ 0, & v_{ab} \cdot r_{ab} > 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\mu_{ab} = \frac{h v_{ab} \cdot r_{ab}}{r_{ab}^2 + (0.1h)^2} \quad (5)$$

Donde $\alpha = 0.01$ y $\beta = 0$ son valores típicos en flujos en superficie libre.

En este trabajo la interpolación se hizo con un kernel de Gauss. La integración se realizó con un esquema numérico Runge-kutta de tercer orden (Taylor Vortex Green).

Condiciones de contorno

Con el fin de contener el fluido dentro del dominio del estudio, es necesario definir un contorno. Monaghan (1994) propuso el uso de fuerzas repulsivas según el esquema de Lennard-Jones (Lennard-Jones 1924), que se utiliza normalmente para evaluar fuerzas entre moléculas. El límite se materializa con partículas fijas que ejercen una fuerza sobre las partículas de fluido que se aproximan. Dada una partícula del contorno y una partícula fluida separadas entre sí una distancia $r < r_0$, la fuerza radial ejercida por unidad de masa es:

$$f(r) = d_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{p_1} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p_2} \right) \frac{r}{r^2} \quad (6)$$

Esta fuerza es cero para distancias más largas que r_0 y es siempre repulsiva. La constante d_0 tiene dimensiones del cuadrado de la velocidad; algunas referencias recomiendan valores proporcionales a gH , donde H es profundidad y g aceleración debido a la gravedad. El coeficiente p_1 debe ser mayor que p_2 . Por lo general, se adoptan $p_1 = 4$ y $p_2 = 2$. Finalmente, r_0 se establece igual a la separación inicial entre partículas. La fuerza es simétrica y reproduce un comportamiento elástico no amortiguado cuando una partícula impacta en el contorno. Este método tiene un coste computacional bajo y es muy adecuado para reproducir geometrías complejas.

Utilidades de una malla cartesiana auxiliar.

Para resolver estas ecuaciones es necesario, en primer lugar, determinar las partículas que interactúan con cada una. Existen diferentes métodos de búsqueda, como es el método de las listas enlazadas o el de las listas de Verlet. SPHERIMENTAL tiene un método de búsqueda basado en la división del espacio en las celdas de acuerdo con una malla cartesiana. Cada celda tiene una etiqueta basada en un código numérico, en función de su posición espacial, lo que permite determinar a qué celda corresponde cada partícula y así limitar el espacio de búsqueda a su celda y a las vecinas. El tamaño de la celda debe ser mayor que el radio del núcleo de la interpolación para asegurar que no haya pares de interacción perdidos en la búsqueda.

La malla auxiliar permite la reordenación de las partículas de acuerdo con su posición espacial, lo que acelera el cálculo al reducir los tiempos de acceso a la memoria por coalescencia.

Además, las celdas facilitan la detección de superficies libres. Pues la existencia de la malla auxiliar permite implementar algoritmos para detectar la posición de las partículas situadas a mayor y menor cota de cada columna vertical de celdas. También es posible contar el número de partículas en la columna, calcular el volumen del líquido en columna vertical y obtener el calado promedio de esa columna de celdas. Complementariamente a lo anterior, las partículas de superficie libre se pueden detectar en función del número de partículas con las que interactúan, es decir, la mitad que el resto de las partículas del dominio.

Regularización del campo de presiones

El código tiene dos algoritmos diferentes implementados para mejorar la densidad y el campo de presión. Las fuerzas de Lennard Jones pueden generar alteraciones en el campo de densidad. La formulación potencial de las fuerzas de Lennard Jones genera una fuerza repulsiva excesiva si una partícula de fluido se aproxima demasiado a las partículas del contorno. Esto ocurre rara vez, pero cuando se produce distorsiona el campo de densidad. Se ha implementado un algoritmo que calcula el promedio, el máximo, el mínimo y la desviación estándar en cada celda del dominio. Un filtro suaviza el campo de densidad imponiendo la densidad promedio de la celda a cualquier partícula cuya densidad esté fuera de un umbral que depende de la desviación estándar. Esta corrección no altera el balance de masa, ya que mantiene la densidad media de cada celda.

Además, el patrón inicial de las presiones hidrostáticas se pierde en simulaciones prolongadas bajo condiciones de flujo constante. Se detectan densidades superiores a ρ_0 densidad de referencia en la superficie libre y la densidad en profundidad es inferior a la correspondiente hidrostática. Sin embargo, el balance de masa por celda verifica que la masa y la conservación del momento se cumplen. Esta alteración del campo de densidad produce más distancia entre las partículas en la superficie libre debido a mayores densidades, también en profundidad se produce una excesiva aproximación de las partículas debido a que su densidad es menor de la que le corresponderían. Por lo tanto, se ha implementado un reajuste del campo de densidad, que restablece el régimen de presión hidrostática de acuerdo con la elevación de la superficie libre en la celda.

Si existen varias superficies libres en una columna, por ejemplo en salpicaduras, esta corrección se realiza con la elevación de superficie de agua más baja.

Condición de contorno de entrada/salida.

La entrada de caudal se realiza introduciendo nuevas partículas en la simulación. Este grupo de nuevas partículas tiene una velocidad y presión inicial asignadas. El número de partículas que se introduce en cada incorporación es el mismo. La modificación de los intervalos de tiempo entre entradas consecutivas permite regular el caudal de entrada. Tras la incorporación de las partículas se reordenan las partículas según un criterio geométrico.

La eliminación de partículas que abandonan el dominio de cálculo, se realiza activando una etiqueta de control. Las partículas con etiqueta activada se omiten durante la reordenación que se realiza en cada paso de tiempo.

Esta condición de entrada funciona correctamente en régimen supercrítico. En regímenes infracríticos se pueden producir inestabilidades al interactuar las partículas introducidas con las existentes. Esto se ha resuelto creando una zona de flujo controlado, usualmente diez veces el tamaño de desratización dx , en el que las partículas son movidas a velocidad impuesta igual a la velocidad inicial.

CASO DE PRUEBA PARA EL FLUJO EN CAUCES

El flujo en cauces en lámina libre ha sido estudiado extensamente y está bien caracterizado. Una descripción completa del flujo en régimen permanente y uniforme se encuentra disponible en la literatura científica y proporciona suficiente información para la validación del caso de prueba.

Flujo en régimen permanente y uniforme

Son dos las condiciones que debe satisfacer un flujo permanente en régimen uniforme: el canal debe ser prismático y el caudal debe ser constante. Para esto, el tiempo de las simulaciones debe prolongarse hasta que se iguale el caudal de salida con el de entrada, y la longitud del canal debe ser lo suficientemente larga para alcanzar el equilibrio entre el peso del agua, las fuerzas viscosas y la fricción con el contorno. Alcanzado el régimen permanente y uniforme no hay aceleración en el flujo y por lo tanto, el calado y la velocidad son iguales en todas las secciones de canal. Una descripción euleriana muestra que la pendiente de fricción y la pendiente del canal del lecho deben ser iguales, como se muestra por la siguiente ecuación de equilibrio dinámico:

$$S_f = \frac{\tau_b}{\rho g R_h} = \frac{\partial z}{\partial x} = S_0 \quad (7)$$

Donde S_f es la pendiente de fricción, S_0 es la pendiente del lecho, τ_b es la tensión tangencial en el fondo, ρ es la densidad del agua, g es la aceleración de la gravedad, R_h es el radio hidráulico, y x y z son las dimensiones espaciales en el sentido longitudinal y vertical, respectivamente. La pendiente de fricción puede calcularse mediante la fórmula de Manning (8),

$$S_f = \frac{n^2 V^2}{R_h^{4/3}} \quad (8)$$

siendo n el coeficiente de rugosidad y V la velocidad media.

Otro método para reproducir la fricción de contorno es el de la rugosidad de Nikuradse. En un flujo turbulento en contacto con la superficie rugosa, el espesor de la capa laminar es mucho menor que la altura de rugosidad k_s definida por Nikuradse. En este caso, está bien establecido (Schlichting 1979, Nezu y Rodi 1986, García 2008) que el perfil de velocidad en la dirección longitudinal del flujo puede ajustarse a una ley logarítmica, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{z}{k_s} \right) + 8.5 \quad (9)$$

Donde v es el valor de la velocidad a la distancia z del fondo, k es la constante de Von Karman, y v_* es la velocidad de arrastre, que puede emplearse para calcular la tensión de fondo.

$$\tau_b = \rho v_*^2 \quad (10)$$

Integrando el perfil de velocidad se puede obtener el valor de la velocidad media de acuerdo con la expresión:

$$\frac{V}{v_*} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{11 R_h}{k_s} \right) \quad (11)$$

La altura de rugosidad de Nikuradse, k_s , está relacionada con el coeficiente de Manning mediante la relación siguiente Ecuación (12):

$$k_s = 11 R_h e^{-\left(\frac{k R_h^{1/6}}{n g^{1/2}} \right)} \quad (12)$$

Ensayos en cauces en superficie libre.

El caso de prueba considerado consiste en un canal recto 2D que reproduce un canal de un metro de ancho sin fricción en las paredes verticales.

Puesto que el objetivo principal de esta investigación es caracterizar la fricción de contorno, los experimentos se han diseñado en régimen supercrítico para que el nivel de lámina no está condicionado por la condición de contorno de aguas abajo. La pendiente del canal se ha fijado en un 1% que proporciona el régimen supercrítico para todos los caudales de ensayo.

El tamaño de partículas de fluido empleado en estos ensayos ha sido $d_x = 0.1$ m, y el espaciamiento entre las partículas de contorno fue $d_{xc} = 0.04$ m, ligeramente inferior a la mitad de d_x .

El grado de discretización empleado en la simulación resulta muy importante si se desean obtener una buena representatividad de la simulación numérica (López, 2015). Se han realizado ensayos con caudales unitarios comprendidos entre 1 y 120 m^3/s m a fin de analizar el la influencia del grado de discretización. Una vez que en los experimentos se alcanzan las condiciones de régimen, el calo H se hace constante y es posible comprobar el grado de discretización mediante el número adimensional de discretización D_a :

$$D_a = \frac{dx}{H} \quad (13)$$

La longitud de canal necesario para alcanzar las condiciones de régimen uniforme, depende del caudal, del calado y de la fricción de contorno, por lo que la longitud empleada en los ensayos ha variado de 400 a 1500 m. La duración de cada ensayo se ha prolongado hasta que el caudal de salida se igualaba con el de entrada.

Resistencia al flujo debido a las fuerzas de Lennard-Jones.

En primer lugar se ha analizado la resistencia al flujo ejercida por la condición de contorno Lennard-Jones. Los parámetros de la Ecuación. (6), empleados en estas simulaciones han sido $d_0=10$, $p_1=4$, $p_2=2$ and $r_0=0.1$ m (igual al tamaño de la partículas de fluido, dx).

La Figura 2 presenta un perfil longitudinal por el eje del canal que compara los valores de calado y velocidad en un ensayo con caudal unitario de $q=10$ m^3/sm .

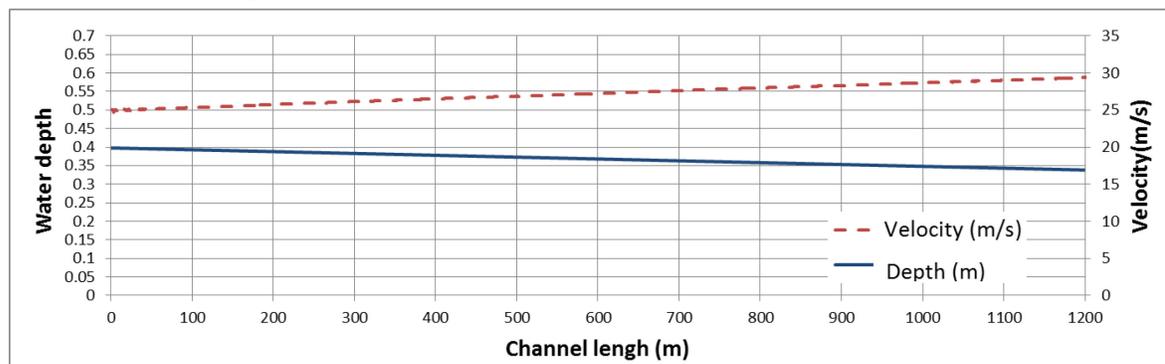


Figura 2 | Perfil longitudinal de calado y velocidad. $q=10$ m^3/sm .

El perfil muestra que el flujo continúa acelerándose después de 1200 m, alcanzando velocidades cada vez más altas sin llegar a un equilibrio de fuerzas. Por lo tanto, la rugosidad resultante en el contorno resulta excesivamente baja y no reproduce correctamente la fricción existente en un flujo en canal en lámina libre.

Las fuerzas repulsivas de Lennard-Jones son importantes durante el periodo transitorio inicial para contener las partículas de fluido dentro del dominio. Una vez que se establece el flujo, la interacción límite-fluido es menor y ejerce una baja resistencia al flujo.

Las partículas del contorno se pueden colocar fuera del borde teórico. Gómez-Gesteira et al. (2010) utilizaron partículas fijas colocadas en dos filas, formando una rejilla escalonada. En ese estudio, algunas partículas del límite se fijaron fuera del límite teórico para generar un componente más alto de la fuerza repulsiva que actúa contra el flujo. Estas fuerzas obstaculizan las partículas de fluido junto al límite, pero introducen una importante perturbación en el flujo.

MÉTODO DE LA FUERZA DE FRICCIÓN EN EL CONTORNO

Este método añade un esfuerzo cortante complementario en el contorno que reproduce los efectos de fricción de la rugosidad. Con este fin, se aplica una aceleración a las partículas de fluido que interaccionan con las partículas de contorno. Este estudio se ha realizado en 2D, por lo que es posible sustituir el radio hidráulico R_h por la profundidad H en las Ecuaciones (8), (11) y (12).

La tensión de corte es función de la velocidad de arrastre v_* , pero en un modelo Lagrangiano, v_* no es una propiedad de las partículas. En hidráulica de canales en lámina libre la resistencia al flujo se suele expresar en función del coeficiente de fricción Ecuación (14).

$$\tau_b = \rho v_*^2 = \rho C_f V^2 \quad (14)$$

Donde C_f es el coeficiente de fricción y V es la velocidad media. De acuerdo con el análisis dimensional, en flujo turbulento, este coeficiente de fricción es función de dos parámetros adimensionales (Ecuación 15). El primero relaciona la rugosidad del fondo con el calado y el segundo es el número de Reynolds, que relaciona las fuerzas viscosas con las de inercia.

$$\tau_b = \rho V^2 \psi \left(\frac{k_s}{h}, \frac{Vh}{\nu} \right) \quad (15)$$

En lugar de la velocidad de arrastre v_* , se ha hecho depender la aceleración adicional de fricción de la velocidad de la partícula de fluido que interacciona con el contorno, v_{part} , y se aplica en su misma dirección pero en sentido opuesto. La siguiente ecuación proporciona una expresión dimensionalmente correcta de la tensión tangencial de fricción.

$$\tau_{f,SPH} = \rho v_*^2 = \rho C_{rough} v_{part}^2 \quad (16)$$

Así, la aceleración ejercida sobre estas partículas será:

$$a_f = \frac{C_{rough}}{r_o} v_{part}^2 \quad (17)$$

donde ρ es la densidad del agua, r_o es el radio de acción de las fuerzas de Lennard Jones, y C_{rough} es el coeficiente de rugosidad. Esta formulación ha sido empleada en estudios de estructuras hidráulicas, pero requieren de trabajos específicos de calibración para ajustar el coeficiente C_{rough} (López, 2016).

Al igual que el coeficiente de fricción el coeficiente C_{rough} depende de dos números adimensionales, (Ecuación 18). En este estudio se ha analizado su dependencia con D_a (Ecuación 13), que relaciona dos magnitudes espaciales, y el coeficiente α , del término viscoso de la Ecuación (4).

$$C_{rough} = \psi(D_a, \alpha) \quad (18)$$

Para analizar la dependencia con D_a , se han realizado cuarenta y cinco experimentos con un coeficiente de rugosidad de Crough que varía de 0,0005 a 0,01. Cada experimento ha requerido varias repeticiones, hasta conseguir establecer las condiciones de flujo uniforme y régimen permanente en el canal, modificando para ello la profundidad inicial, la longitud del canal o el tiempo de simulación. En estas pruebas se utilizó el coeficiente de viscosidad artificial de Monaghan, $\alpha = 0,01$.

En cada ensayo se ha obtenido registro de la profundidad y la velocidad media cada medio metro a lo largo del eje del canal. Además, se calcularon a los mismos intervalos el caudal, el momento y la densidad media. También se ha obtenido el perfil vertical de velocidad una vez que se alcanza el flujo uniforme en estado estacionario.

La Figura 3 muestra el post-procesado realizado para un test con un caudal unitario de $20 \text{ m}^3/\text{s m}$ con un coeficiente de fricción $C_{rough} = 0,008$. El perfil de velocidad a lo largo del eje del canal muestra que se necesitaron al menos 600 m de longitud para alcanzar el flujo uniforme. La Figura corresponde a un flujo estacionario en todas las secciones del canal. La profundidad se estabiliza en 2,35 m. La gráfica muestra la conservación del momento y de la densidad media en toda la longitud del canal y sección estabilizada en $1000,42 \text{ kg} / \text{m}^3$.

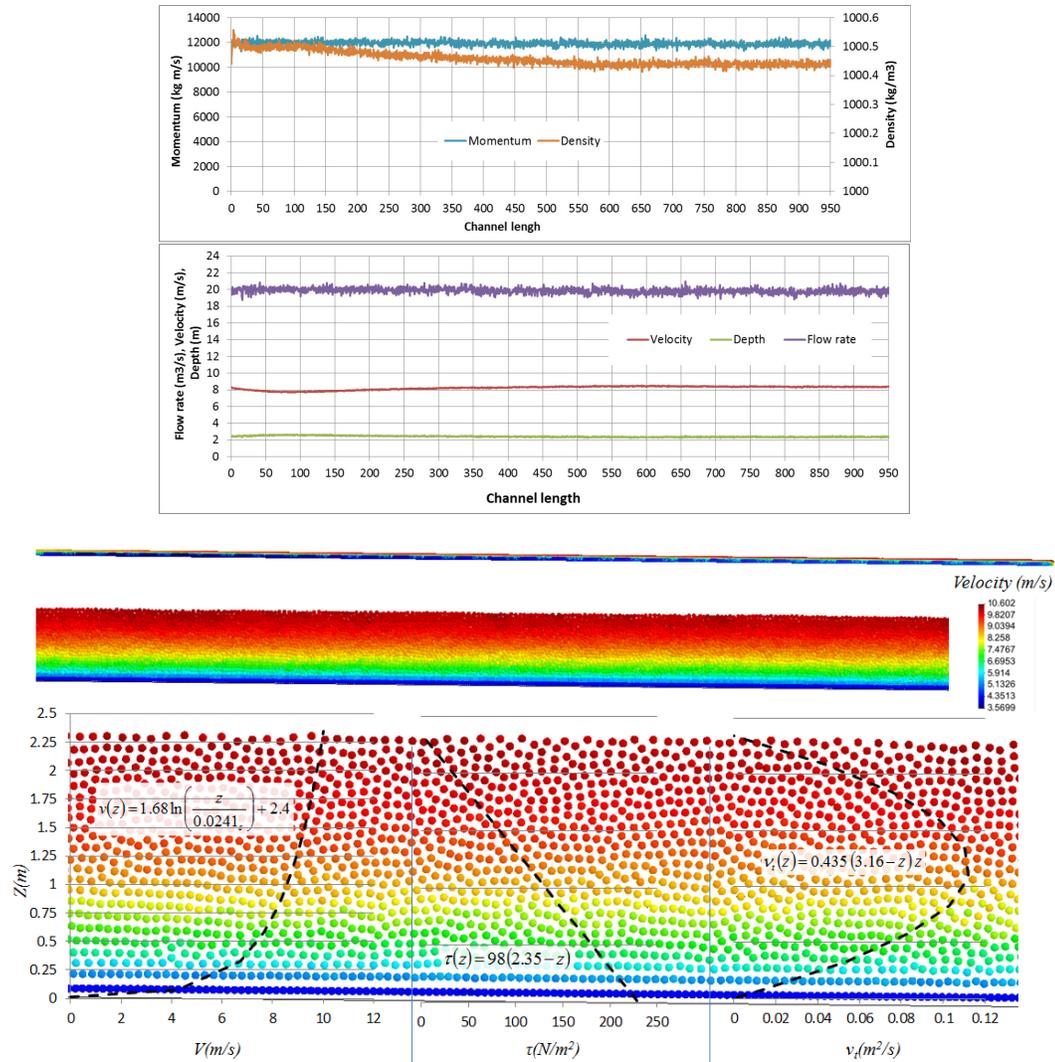


Figura 3 | Ejemplo de test. Caudal = 20 m³/s m. Longitud del canal= 950 m, Calado de régimen uniforme = 2.35 m. Coeficiente de Manning n= 0.0212. La Figura muestra tres niveles de aproximación. El color de las partículas responde al campo de velocidad. Sobre el nivel de aproximación más próximo se presentan los perfiles verticales de velocidad, de tensión tangencial y viscosidad cinemática turbulenta. Perfil longitudinal de calado y velocidad. $q=10 \text{ m}^3/\text{sm}$.

La Tabla 1 resume los resultados obtenidos en todas las pruebas. Una vez que se ha alcanzado el régimen permanente y uniforme, se han obtenido el calado y la velocidad media, valores a partir de los cuales se ha obtenido el coeficiente de Manning, considerando que la pendiente de fricción se ha igualado con el de la solera. Además se ha obtenido el número de discretización adimensional de cada ensayo, Da Ecuación (13). La Tabla 1 presenta también los coeficientes de perfil de velocidad, de acuerdo con la Ecuación (19).

$$v(z) = a \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + b \tag{19}$$

De acuerdo con este perfil logarítmico de velocidad, se ha obtenido para cada ensayo el perfil lineal de tensiones Ecuación (21) y el perfil parabólico de viscosidad cinemática turbulenta Ecuación (22).

$$\tau(z) = \rho g(H - z)S_o \tag{20}$$

$$\tau(z) = \rho \nu_t \frac{dv}{dz} \tag{21}$$

$$v_i(z) = \frac{g S_o}{a} (H - z)z \quad (22)$$

Tabla 1 | Resumen de los ensayos realizados con $\alpha=0.01$

C_{rough}	q (m^2/s)	H (m)	D_a	V^* (m/s)	Manning's n ($m^{1/6}$)	Nikuradse's k_s (mm)	a	b	C_e
0.0005	5	0.570	0.175	0.236	0.00779	0.00006	0.12	7.8	1.75
0.0005	10	0.860	0.116	0.290	0.00794	0.00007	0.31	8.7	2.17
0.0005	20	1.296	0.077	0.356	0.00778	0.00006	0.65	9.3	2.02
0.0005	40	1.943	0.051	0.436	0.00802	0.00007	0.85	9	4.83
0.0005	60	2.446	0.041	0.490	0.00791	0.00007	1.44	9.2	2.30
0.0005	80	2.958	0.034	0.538	0.00789	0.00006	1.81	9.3	1.60
0.001	2	0.401	0.250	0.198	0.01107	0.00049	0.11	4.3	1.61
0.001	5	0.697	0.143	0.261	0.01103	0.00048	0.23	5.65	1.92
0.001	10	1.030	0.097	0.318	0.01103	0.00048	0.4	6.6	2.05
0.001	20	1.577	0.063	0.393	0.0109	0.00045	0.83	6.4	2.16
0.001	40	2.324	0.043	0.477	0.0107	0.00040	1.29	6.5	1.89
0.001	60	2.859	0.035	0.529	0.01031	0.00032	1.95	3.8	1.83
0.001	80	3.327	0.030	0.571	0.01009	0.00028	1.85	6.25	1.35
0.001	120	4.133	0.024	0.636	0.0098	0.00024	3.07	-0.8	1.89
0.002	2	0.490	0.204	0.219	0.01547	0.00364	0.13	3.5	1.69
0.002	5	0.836	0.120	0.286	0.0151	0.00315	0.32	4.43	1.77
0.002	10	1.283	0.078	0.355	0.01513	0.00319	0.47	5.45	1.63
0.002	20	1.909	0.052	0.432	0.0148	0.00279	0.92	5.3	1.75
0.002	40	2.770	0.036	0.521	0.01382	0.00185	1.49	4.78	1.87
0.002	60	3.314	0.030	0.570	0.01286	0.00120	2.49	0.1	1.53
0.002	80	3.747	0.027	0.606	0.01261	0.00107	2.63	0.52	1.81
0.002	120	4.431	0.023	0.659	0.01187	0.00074	3.06	-1.08	1.65
0.003	1	0.363	0.276	0.188	0.0185	0.01066	0.09	2.53	1.30
0.003	2	0.548	0.182	0.232	0.01865	0.01119	0.17	3.1	1.63
0.003	5	0.936	0.107	0.303	0.01811	0.00938	0.4	3.82	1.76
0.003	10	1.392	0.072	0.369	0.01738	0.00733	0.74	3.97	1.74
0.004	1	0.392	0.255	0.196	0.0213	0.02482	0.08	2.35	0.28
0.004	2	0.593	0.169	0.241	0.0213	0.02482	0.17	2.95	1.58
0.004	5	0.999	0.100	0.313	0.0203	0.01860	0.47	3.6	1.49
0.004	10	1.468	0.068	0.379	0.0192	0.01332	0.84	3.6	1.56
0.004	20	2.172	0.046	0.461	0.01845	0.01048	1.24	3.7	1.45
0.004	40	3.137	0.032	0.554	0.0169	0.00619	2.04	2.3	1.37
0.004	120	6.131	0.016	0.775	0.01662	0.00560	3.95	-3.3	2.69
0.006	1	0.447	0.224	0.209	0.0261	0.08403	0.1	2.15	1.48
0.006	5	1.103	0.091	0.329	0.02381	0.04843	0.5	3.45	1.38
0.006	10	1.578	0.063	0.393	0.02176	0.02822	1	3.25	1.40
0.006	20	2.330	0.043	0.478	0.0204	0.01916	1.74	2	1.83
0.006	40	3.319	0.030	0.570	0.0186	0.01101	2.25	1.5	1.40
0.006	120	6.348	0.016	0.789	0.0175	0.00764	3.97	-3.9	2.30
0.008	5	1.167	0.086	0.338	0.0261	0.08403	0.56	3.3	1.27
0.008	10	1.698	0.059	0.408	0.024	0.05080	1.2	2.9	1.65
0.008	20	2.354	0.042	0.480	0.0212	0.02413	1.68	2.4	1.29
0.01	5	1.219	0.082	0.346	0.028	0.12810	0.6	3.28	1.18
0.01	10	1.771	0.056	0.417	0.0257	0.07659	1.32	2.85	1.77
0.01	20	2.425	0.041	0.487	0.0221	0.03097	1.86	1.9	1.39

El método de cálculo de las últimas dos columnas de la Tabla 1 se explica a continuación. En régimen uniforme, con caudal y calado conocido, es también conocida la velocidad, de donde se puede calcular el término b Ecuación (23) despejando de la Ecuación (19).

$$b = V - a \left(\ln \frac{R_h}{k_s} - 1 \right) \quad (23)$$

Basándose en este perfil de velocidad también es posible calcular la distancia efectiva a la que actúa la fuerza, planteando el equilibrio de tensiones de la Ecuación (24).

$$\tau(z = H - d_e) = \rho g(H - d_e)S_o = \rho C_{rough} v_{part}^2 = \rho C_{rough} \left(a \ln \frac{d_e}{k_s} + b\right)^2 \tag{24}$$

Siendo d_e la distancia efectiva a la que actúa la tensión de fricción (Figura 4) y que depende del radio de acción de las fuerzas de Lennard-Jones:

$$d_e = C_e r_0 \tag{25}$$

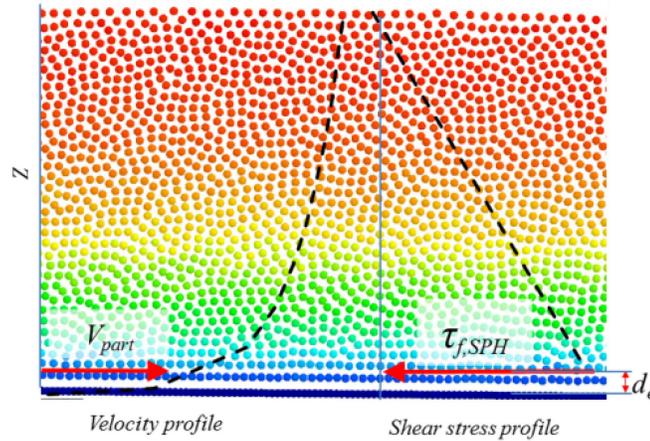


Figura 4 | Distancia de aplicación de la tensión resultante de fricción.

La Figura 5 grafica los valores de la Tabla 1 contrastando los valores obtenidos de n de Manning y el número de discretización D_a . Se han agrupado por colores los ensayos correspondientes al mismo coeficiente C_{rough} . Se aprecia la dependencia de C_{rough} con el grado de discretización representado por D_a .

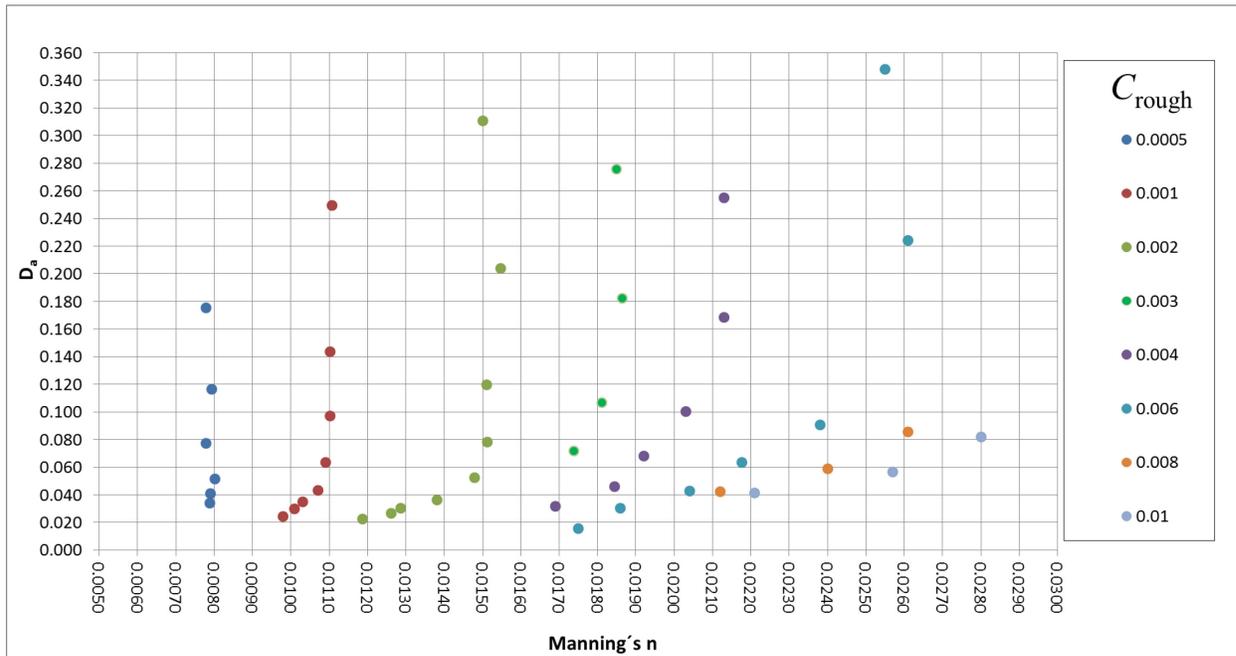
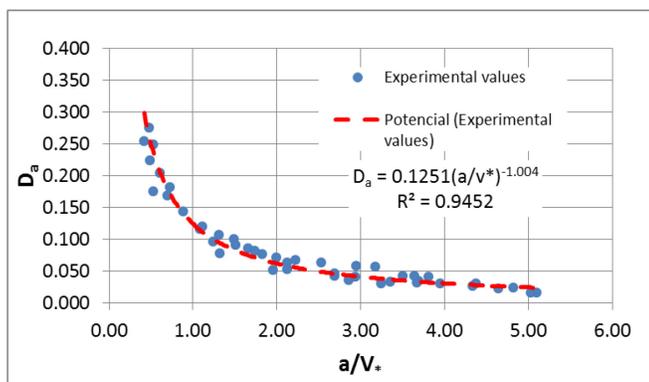


Figura 5 | Resultado de la experimentación numérica SPH. Relación entre el coeficiente de Manning y D_a . Datos agrupados por el coeficiente de rugosidad C_{rough} .

El análisis de los ensayos resumidos en la Tabla 1 ha permitido apreciar la relación de la Ecuación (26) entre la pendiente del perfil de velocidad, a/v_* , y el grado de discretización D_a (Figura 6).

Figura 6 | Relación entre a/v_* y D_a

$$a = \frac{v_*}{8D_a} \quad (26)$$

Esta expresión muestra una dependencia directa entre la forma del perfil de velocidad obtenida en una simulación numérica SPH y el grado de discretización. Teniendo en cuenta esta dependencia, la Ecuación (26), y comparando tanto el coeficiente de término logarítmico del perfil de velocidad teórico Ecuación (9) y la Ecuación (19) se obtiene la siguiente relación Ecuación (27):

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{8D_a} \quad (27)$$

Puesto que la constante de Von Karman k es igual a 0.4 , un valor de $D_a=0.05$ satisface la ecuación.

Se han realizado una nueva serie de ensayos con diferentes valores del coeficiente α (4), para analizar la dependencia de C_{rough} con la viscosidad. Los resultados se muestran y resumen en la Tabla 2 y Figura 7.

Tabla 2 | Resumen de los ensayos para analizar la influencia de α .

α	C_{rough}	q (m ² /s)	H (m)	v^*	a	D_a	a/v^*
0	0.002	20	1.460	0.378	1.800	0.068	4.759
0	0.004	5	0.715	0.265	0.734	0.140	2.774
0	0.004	2	0.487	0.219	0.378	0.205	1.730
0.0001	0.002	20	1.445	0.376	1.787	0.069	4.749
0.0001	0.004	5	0.726	0.267	0.734	0.138	2.752
0.0001	0.004	2	0.492	0.220	0.370	0.203	1.686
0.0001	0.001	40	2.095	0.453	3.329	0.048	7.348
0.001	0.002	20	1.571	0.392	1.994	0.064	5.082
0.001	0.004	5	0.835	0.286	0.809	0.120	2.826
0.001	0.004	2	0.510	0.223	0.365	0.196	1.631
0.001	0.001	40	2.183	0.463	2.821	0.046	6.098
0.003	0.002	20	1.718	0.410	1.644	0.058	4.007
0.003	0.004	5	0.910	0.299	0.659	0.110	2.205
0.003	0.004	2	0.560	0.234	0.277	0.179	1.181
0.003	0.001	40	2.282	0.473	2.442	0.044	5.163
0.005	0.002	20	1.763	0.416	1.345	0.057	3.235
0.005	0.004	5	0.946	0.304	0.519	0.106	1.705
0.005	0.004	2	0.579	0.238	0.239	0.173	1.005
0.005	0.001	40	2.293	0.474	2.046	0.044	4.316
0.02	0.002	20	1.912	0.433	0.556	0.052	1.285
0.02	0.004	5	1.035	0.318	0.261	0.097	0.818
0.02	0.004	2	0.600	0.243	0.107	0.167	0.439
0.02	0.001	40	2.397	0.485	0.822	0.042	1.696
0.03	0.002	20	1.981	0.441	0.404	0.050	0.916
0.03	0.004	5	1.045	0.320	0.166	0.096	0.517
0.03	0.004	2	0.596	0.242	0.069	0.168	0.286
0.03	0.001	40	2.506	0.496	0.564	0.040	1.138

Para cada grupo de ensayos con el mismo coeficiente de viscosidad α se ha obtenido un ajuste, similar al realizado anteriormente con $\alpha= 0.01$. Lo que ha permitido generalizar la expresión (Ecuación 26) para cualquier coeficiente de alfa mediante la Ecuación (28).

$$\alpha = \frac{v_*}{C_\alpha D_a} \tag{28}$$

La Figura 7 muestra la dependencia entre a y α a través de C_α . La Ecuación 29 presenta el ajuste lineal obtenido para este parámetro.

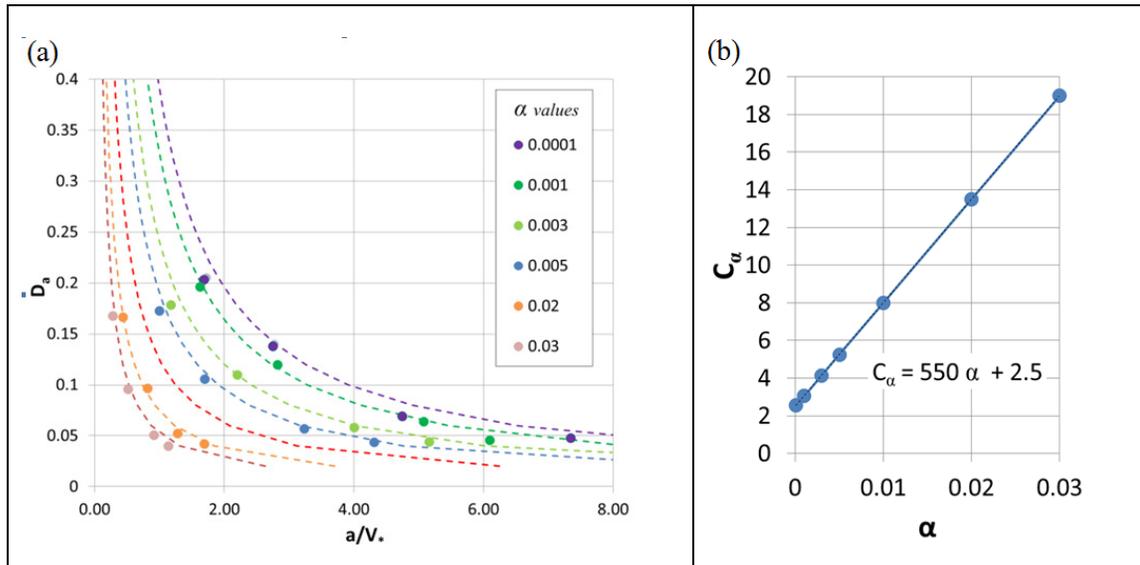


Figura 7 | Ensayos con diferentes coeficientes de viscosidad de α . La Figura 7a muestra la relación entre a/v_* y D_a para cada valor de α , y la Figura 7b la relación entre α y C_α .

$$C_\alpha = 550\alpha + 2.5 \tag{28}$$

Teniendo en cuenta el valor de la constante de Von Karman se puede establecer un criterio de semejanza hidráulica que garantice la representatividad de las simulaciones SPH en flujos turbulentos en canales en lámina libre, Ecuación (30).

$$\frac{C_\alpha D_a}{k} = 1 \tag{30}$$

Con valores de $C_\alpha D_a > k$, la simulación SPH resulta excesivamente turbulenta (Figura. 8a). La velocidad del perfil vertical se homogeneiza antes que el perfil teórico. Esta situación se presenta grados de discretización bajos, que se corresponden con valores altos de D_a .

Con valores de $C_\alpha D_a \approx k$, tanto el perfil de velocidad como el de viscosidad turbulenta son semejantes, resultantes de la simulación SPH son semejantes a los propuestos por el modelo teórico (Figura 8b). El empleo de valores bajos del coeficiente de viscosidad α , permite emplear mayores números de discretización Da , manteniendo la proporcionalidad. Esto permite emplear en las simulaciones partículas de mayor tamaño, lo que permite reducir los costes computacionales sin perder la representatividad del modelo.

Finalmente valores de $C_\alpha D_a < k$, proporcionan simulaciones SPH muy poco viscosas, con perfiles de velocidad muy suaves que no se corresponde con flujos turbulentos (Figura 8c)

La Ecuación (30) permite preconfigurar el modelo SPH. Permite determinar el tamaño de partícula y el coeficiente de viscosidad más adecuados si se conocen de forma aproximada el caudal y el calado de la zona de estudio.

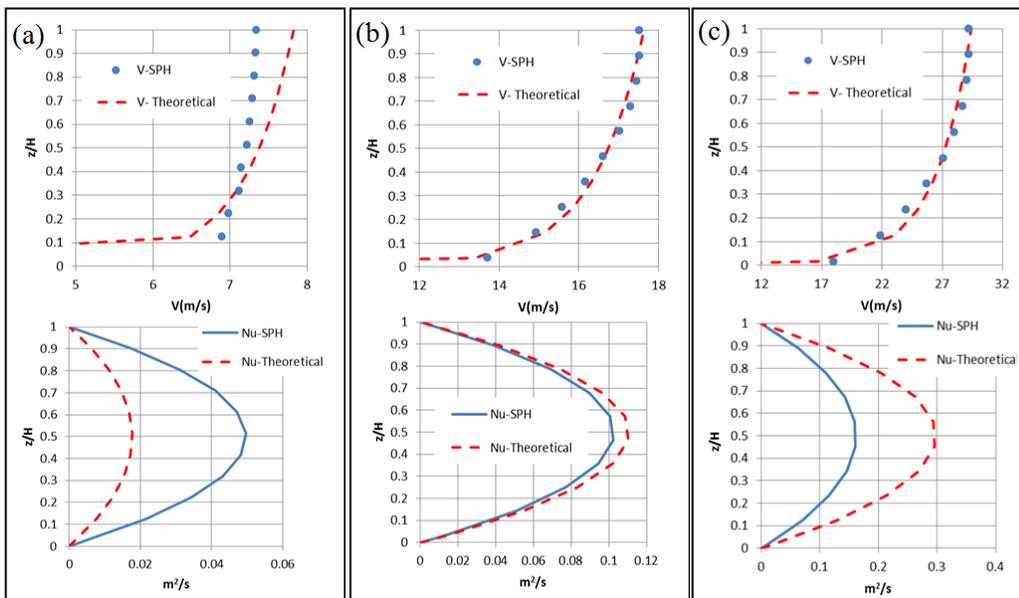


Figura 8a | $C_a D_a = 1.17$, $C_{rough} = 0.001$; $q = 5 \text{ m}^3/\text{s}$; $H = 0.70 \text{ m}$; $n = 0.01103 \text{ m}^{1/6}$. **Figura 8b** | $C_a D_a = 0.35$, $C_{rough} = 0.001$; $q = 40 \text{ m}^3/\text{s}$; $H = 2.32 \text{ m}$; $n = 0.0107 \text{ m}^{1/6}$. **Figura 8c** | $C_a D_a = 0.18$, $C_{rough} = 0.001$; $q = 120 \text{ m}^3/\text{s}$; $H = 4.13 \text{ m}$; $n = 0.0098 \text{ m}^{1/6}$

Una vez conocidos el perfil de velocidad y de viscosidad turbulenta, es posible obtener una formulación que proporcione el coeficiente de rugosidad. Este coeficiente se asigna a las partículas de contorno para reproducir la resistencia al flujo asociada a un coeficiente n de Manning o k_s de Nikuradse, ambos relacionados por la Ecuación (12). Del equilibrio de tensiones propuesto en la Ecuación (24), y teniendo en cuenta la Ecuación (8), se obtiene la Ecuación (31)

$$C_{rough} = \frac{g(H - C_e r_o)}{H^{4/3}} n^2 \left(\frac{a \left(\ln \frac{H}{k_s} - 1 \right) + b}{a \left(\ln \frac{C_e r_o}{k_s} - 1 \right) + b} \right)^2 \tag{31}$$

Empleando esta formulación se han obtenido las curvas para cada coeficiente C_{rough} que relaciona el coeficiente n de Manning con el número de discretización adimensional D_a , empleando un coeficiente $C_e = 1.74$ (25), que corresponde al valor medio de la Tabla 1. Estas curvas se han graficado en la Figura 9 junto con los datos experimentales de la Figura 5 para que se pueda apreciar el buen ajuste que se obtiene.

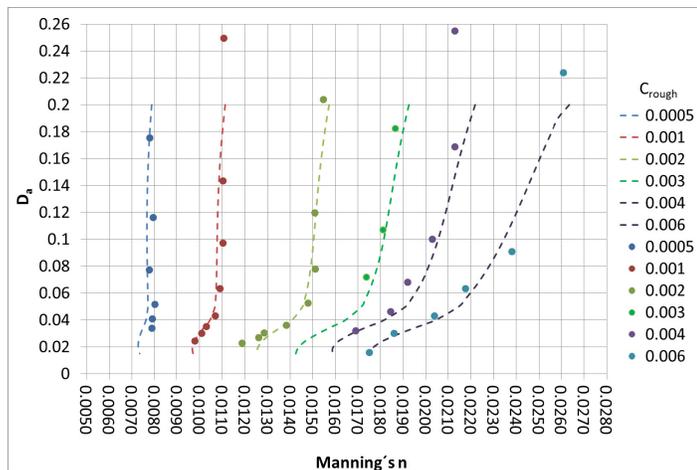


Figura 9 | Curvas de C_{rough} que relacionan el coeficiente n de Manning con el número de discretización adimensional.

CONCLUSIONES

La condición de contorno de Lennard-Jones reproduce una fricción muy débil que apenas ejerce resistencia al flujo.

Se ha presentado un método original para reproducir la resistencia al flujo en simulaciones SPH para flujo en canal en lámina libre. El método de la fuerza de fricción introduce una tensión cortante de contorno que aplicando una aceleración a las partículas de fluido que interaccionan con el contorno. Un coeficiente de C_{rough} permite modular fricción introducida de acuerdo con los coeficientes de k_s de Nikuradse o n de Manning deseados. Se ha presentado una formulación original para este coeficiente C_{rough} junto con los trabajos de calibración.

Además se ha presentado la formulación general del perfil de velocidad y de viscosidad turbulenta que se obtendrán en una simulación SPH, en función del tamaño de partícula relativo D_a y del coeficiente de viscosidad artificial α seleccionado.

Por último, se ha propuesto un criterio de semejanza hidráulica para analizar la representatividad de una simulación SPH para flujo en canal en lámina libre, en el que la fricción de contorno establece el patrón de flujo de turbulento.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al CEDEX por el apoyo a esta investigación, especialmente a José María Grassa, pionero del SPH.

REFERENCIAS

- Crespo, A.J.C., Gómez-Gesteira, M., Dalrymple, R.A. (2007). Boundary conditions generated by dynamic particles in SPH methods. *CMC: Computers, Materials, & Continua*, 5(3), 173–184. doi/10.3970/cmc.2007.005.173
- Crespo, A., Dominguez, J.M., Barreiro, A., Gómez-Gesteira, M., Rogers, B.D. (2011). GPUs, a new tool of acceleration in CFD: Efficiency and reliability on smoothed particle hydrodynamics methods. *PLOS ONE* 6(6), e20685. doi:10.1371/journal.pone.0020685.
- García, M.H. (2008). *Sedimentation Engineering: Processes, Measurements, Modeling, and Practice*. Sedimentation Committee of the Environmental and Water Resources Institute of ASCE (American Society of Civil Engineers). ISBN 978-0-7844-0814-8. <http://dx.doi.org/10.1061/9780784408148>
- Gatti, D., Maffio, A., Zuccalà, D., Di Monaco, A. (2007, July). *SPH simulation of hydrodynamics problems related to dam safety*. Paper presented at the meeting of 32nd Congress of the IAHR, Venice, CD-ROM, Paper 2, SS09. ISBN 88-89405-06-6.
- Gómez-Gesteira, M., Rogers, B.D., Dalrymple, R.A., Crespo, A.J.C. (2010). State-of-the-art of classical SPH for free-surface flow. *Journal of Hydraulic Research* 48, Extra Issue, 6–27. ISSN: 0022-1686. <http://dx.doi.org/10.1080/00221686.2010.9641242>
- Grassa, J.M. (2004). El método SPH. Aplicaciones en ingeniería marítima. *Revista de ingeniería civil*, 133, 37-55. CEDEX. ISSN: 0213-8468
- Grassa, JM. (2007). *Wave forces on a wavemaker. SPH simulation and comparison with analytic results*. Paper presented at the meeting of 32nd Congress of the IAHR, Venice, Vol. I, p. 100. ISBN 88-89405-06-6.
- Hérault, A., Bilotta, G., Dalrymple, R.A. (2010). SPH on GPU with CUDA. *Journal of Hydraulic Research* 48, Extra Issue, 74–79. ISSN: 0022-1686. <http://dx.doi.org/10.1080/00221686.2010.9641247>
- King, H.C. (1918). *Handbook of Hydraulics for the Solution of Hydraulic Problems*. McGraw-Hill, New York. 204–210.
- Lennard-Jones, J.E. (1924). *On the determination of molecular fields. From the Equation of State of a Gas*. [Proceedings of the Royal Society A](https://doi.org/10.1098/rspa.1924.0082), 106 (738), 463–477. doi:10.1098/rspa.1924.0082.

- Liu, G.R., Liu, M.B. (2003). *Smoothed Particle Hydrodynamics. A Meshfree Particle Method*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore. ISBN-10: 981-238-456-1 ISBN-13: 978-981-238-456-0
- López, D., Marivela, R., Aranda F. (2009). *Calibration of SPH model using prototype pressure data from the stilling basin of the Villar del Rey dam, Spain*. Proceedings of 33rd Congress of IAHR, Water Engineering for a Sustainable Environment, Vancouver. 9-14 ISBN: 978-90-78046-08-0.
- López, D., Marivela, R., Garrote L. (2010). Smooth particle hydrodynamics model applied to hydraulic structures: A hydraulic jump test case. *Journal of Hydraulic Research*, 48, Extra Issue, 142–158. ISSN: 0022-1686. <http://dx.doi.org/10.1080/00221686.2010.9641255>
- López, D., Cuellar, V. (2011a). *Paralelización CUDA del método SPH. Aplicaciones en el diseño de estructuras hidráulicas*. Proceedings of III Jornadas de Ingeniería del Agua. Barcelona. Spain. ISBN:978-84-267-2071-9.
- López, D., de Blas, M., Marivela, R., Rebollo, J.J., Díaz R., Sánchez-Juny M., Estrella, S. (2011b). *Estudio hidrodinámico de vertederos y rápidas escalonadas con modelo numérico tridimensional SPH: Proyecto ALIVESCA*. Proceedings of II JIA. ISBN-13: 978-84-615-4023-5.
- López D, Cuellar V., Díaz R. (2015). Corrección termodinámica de la difusión numérica del método WCSPH. *Ingeniería del Agua*, 19.(1), 1-16. <http://dx.doi.org/10.4995/ia.2015.3140>
- López D., Díaz R., Rebollo J.J., Ramos T., Andrés F.R. Berga M.I. (2016). Aplicación del método SPH al estudio hidráulico de estructuras. Análisis hidrodinámico del aliviadero en pozo de la presa de Nagore (Navarra). *Revista Iberoamericana del Agua*. 3 (1), 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.riba.2016.03.001>
- Monaghan, J.J. (1992). Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 30, 543–574. DOI: 10.1146/annurev.aa.30.090192.002551
- Monaghan, J.J. (1994). Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110(2), 399-406. DOI: 10.1006/jcph.1994.1034
- Monaghan, J.J. (2005). Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68(8), 1703–1759. DOI:10.1088/0034-4885/68/8/R01
- Nezu, I., Rodi, W. (1986). Open Channel Flow measurements with a laser Doppler anemometer. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 112(5), 335-355. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1986\)112:5\(335\)#sthash.0j4K627A.dpuf](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1986)112:5(335)#sthash.0j4K627A.dpuf)
- Nikuradse, J. (1933). *Stromungsgesetz in rauhren rohren*, vdi-forschungsheft 361. (English translation: *Laws of Flow in Rough Pipes*. Technical report, NACA Technical Memo 1292 (1950). National Advisory Commission for Aeronautics, Washington, DC.)
- Randles, P.W., Libersky, L.D. (1996). Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 375–408. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01090-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01090-0)
- Schlichting, H., (1979). *Boundary Layer Theory*, 7th edition, McGraw-Hill, New York. ISBN 10: 0070553343 ISBN 13: 9780070553347